Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Я. АКУШСКИЙ

НОВЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НА ТАБУЛЯТОРЕ

(Представлено академиком Н. Г. Бруевичем 23 XII 1947)

Одной из важнейших операций математической вычислительной практики является вычисление сумм произведений. Задачи численного интегрирования, перемножения векторов, перемножения матрицы на вектор и матриц друг на друга и т. п. приводят к необходимости определения сумм произведений. Естественно поэтому, что постановка операции вычисления сумм произведений на табуляторе привлекала внимание ряда исследователей. Результатом этого явился метод, введенный у нас И. Н. Янжулом ([1], [2]). Различные модификации этого метода, основанного на образовании нарастающих итогов второго порядка, подробно рассмотрены в ([2]). В дальнейших наших ссылках этот метод будет фигурировать как метод 1.

Применение циклов, основанных на представлении множителей по двоичной системе ([3]), приводит к новым методам вычисления сумм произведений на табуляторе.

Пусть нам надо вычислить сумму $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i$ и пусть b_i представляется в виде $b_i = \varepsilon_{t,i} 2^t + \varepsilon_{t-1,i} 2^{t-1} + \ldots + \varepsilon_{q,i} 2^q + \ldots + \varepsilon_{1,i} 2 + \varepsilon_{0,i}$, где $\varepsilon_{q,i}$ $(q = 0, 1, \ldots, t)$ может принимать значения 1 или 0. Введем массив М, состоящий из k карт: $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_k$.

На карте π_i помещаем в секторе g индекс i, в g_1 — число a_i и в колонках λ_q $(q = 0, 1, \ldots, t)$ — значение $\varepsilon_{q,i}$, отображающееся надсечкой в колонке λ_q при $\varepsilon_{q,i} = 1$ и отсутствием надсечки при $\varepsilon_{q,i} = 0$. Массив М подвергается серии табуляций со следующей коммутацией (через селектор S_1):

$$g_1 \to C_1, \qquad (X)_1 \to \sigma_1 \tag{1}$$

(C_1 — ряд приемных контактов селектора S_1, $(X)_1$ — ряд рабочих контактов селектора). Всего проводится $t+1$ табуляций с коммутацией (1), но с переменой колонок управления селектора — S_1. Первая табуляция — S_1 управляется по колонке λ_t, вторая табуляция — S_1 управляется по колонке $\lambda_{t-1}, \ldots, t+1$-я табуляция S_1 управляется по колонке λ_0. После каждой табуляции вводится ход $(\sigma_1)_1$. Исключение составляет последняя табуляция, когда ход $(\sigma_1)_1$ не производится, а вместо него осуществляется печать и последующее гашение данных счетчика σ_1.

После $(t+1)$-й табуляции в счетчике σ_1 накопится число

$$2^t \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_{t,i} + 2^{t-1} \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_{t-1,i} + \ldots + \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_{0,i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i (\varepsilon_{t,i} 2^t + \varepsilon_{t-1,i} 2^{t-1} + \ldots + \varepsilon_{0,i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i.$$

Можно осуществлять описанный способ, который мы назовем способом поразрядного умножения, размещая a_i и b_i на различных картах. Так, изъяв из карт массива M содержимое колонок λ_q и перенеся их на новые карты массива $\overline{M}$ так, чтобы карта $\overline{\pi}_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ этого массива содержала в секторе g индекс i и в колонках λ_q — значения $\varepsilon_{q,i}$, мы можем получить нужную сумму совместными табуляциями массивов M и $\overline{M}$.

Способ поразрядного умножения позволяет проводить одновременное вычисление нескольких сумм произведений. Пусть нам надо вычислить суммы $Q_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(1)} b_i^{(1)}$, $Q_2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(2)} b_i^{(2)}, \ldots, Q_\nu = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(\nu)} b_i^{(\nu)}, \ldots$ $\ldots, Q_v = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(v)} b_i^{(v)}$. Пусть, далее, $b_i^{(\nu)} = \varepsilon_{t,i}^{(\nu)} 2^t + \varepsilon_{t-1,i}^{(\nu)} 2^{t-1} + \ldots + \varepsilon_{0,i}^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, v)$. На карту π_i массива M наносим в секторе g индекс i, в секторах g_ν — числа $a_i^{(\nu)}$, а в колонке λ_q^ν $(q=0, 1, \ldots, t; \nu=1, 2, \ldots$ $\ldots, v)$ — значения $\varepsilon_{q,i}^{(\nu)}$. Массив M подвергается серии табуляций с коммутацией

$$g_\nu^\square \to C_\nu, \qquad (X)_\nu \to \sigma_\nu' \qquad (\nu=1, 2, \ldots, v). \tag{2}$$

Во время первой табуляции селекторы S_ν управляются по колонкам λ_t^ν, во время второй табуляции — по колонкам λ_{t-1}^ν и т. д. После каждой табуляции (за исключением последней, при которой селекторы S_ν управляются по колонкам λ_0^ν) возникает ход $(\sigma_1)_1$. Легко видеть, что в результате подобных табуляций мы получим в счетчике σ_ν сумму Q_ν.

Рассмотрим теперь другой способ вычисления суммы произведений — способ дополнительных карт. Образуем массив M, состоящий из $t+1$ частичных массивов $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_q, \ldots \mu_t$. Каждый частичный массив μ_q состоит из k карт π_{iq} $(i=1, 2, \ldots, k)$. На карте π_{iq} помещаем в секторе g — индекс i, в секторе $\overline{g}$ — номер массива q, в g_1 — число a_i и в колонке λ — значение $\varepsilon_{q,i}$ (где $b_i = \varepsilon_{t,i} 2^t + \varepsilon_{t-1,i} 2^{t-1} + \ldots$ $\ldots + \varepsilon_{q,i} 2^q + \ldots + \varepsilon_{0,i}$). Упорядочиваем массив M по сектору $\overline{g}$ в порядке убывания номера q и табулируем массив M с коммутацией (1) с автоконтролем по сектору $\overline{g}$ с возникновением хода $(\sigma_1)_1$ при каждой перемене контрольного признака (за исключением последней, когда исчерпаны все карты массива M). Селектор S_1 управляется по колонке λ. В результате подобной табуляции, как это нетрудно показать, опираясь на предыдущие рассмотрения, мы получаем в счетчике σ_1 искомую сумму.

Способ дополнительных карт позволяет также осуществлять одновременные вычисления сумм $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots, Q_v$. В этом случае карта π_{iq} должна содержать в секторах g и $\overline{g}$ соответственно i и q, в секторах g_ν $(\nu=1, 2, \ldots, v)$ — числа $a_i^{(\nu)}$ и в колонках λ^ν — значения

$\varepsilon_{q,i}^{(\nu)}$ (где $b_i^{(\nu)}=2^t\varepsilon_{t,i}^{(\nu)}+2^{t-1}\varepsilon_{t-1,i}^{(\nu)}+\ldots+2^q\varepsilon_{q,i}^{(\nu)}+\ldots+\varepsilon_{0,i}^{(\nu)}$). Упорядочивая подобный массив M по сектору $\bar{g}$ в порядке убывания номера q и табулируя его с коммутацией (2), с управлением сектором S_ν по колонке λ_ν, с автоконтролем по сектору $\bar{g}$ с возникновением хода $(\sigma_1)_1$ при каждой (исключая последнюю) перемене контрольного признака, мы получим в счетчике σ_ν сумму Q_ν.

Перейдем к исследованию возможностей сочетаний различных способов вычисления сумм $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i$ для вычисления сумм более сложного вида. Пусть нам надо вычислить сумму $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i c_i$ и пусть $c_i = 2^t\eta_{t,i}+2^{t-1}\eta_{t-1,i}+\ldots+2^q\eta_{q,i}+\ldots+\eta_{0,i}$. Образуем массив М, состоящий из k карт $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_k$. На карте π_i помещаем в сектор g — индекс i, в сектор g_a — число a_i, в сектор g_b — число b_i и в колонках λ_q $(q=0, 1, \ldots, t)$ — значение $\eta_{q,i}$. Массив М упорядочивается в убывающем порядке по колонкам сектора g_b, после чего подвергается серии табуляций со следующей коммутацией (занимаются счетчики σ_1 и σ_2 и селектор S):

$$g_a \to C, \qquad (X) \to \sigma_2. \tag{3}$$

Автоконтроль устанавливается по колонкам сектора g_b с возникновением при каждой перемене контрольного признака хода $\sigma_2 \to \sigma_1$. Всего проводится $t+1$ табуляций. Каждая табуляция проводится с управлением селектором по определенной колонке из числа колонок λ_q. Так, при первой табуляции селектор управляется колонкой λ_t, при второй табуляции — колонкой λ_{t-1} и т. д. После каждой табуляции вводится ход $(\sigma_1)_1$, $\sigma_2 \rightrightarrows \sigma_2$. Последняя табуляция проводится без завершающего табуляцию хода $(\sigma_1)_1$, вместо которого вводится печатающий ход, проявляющий данные со счетчика σ_1, и последующая нормализация счетчиков σ_1 и σ_2. В результате в счетчике σ_1 по окончании всех табуляций образуется сумма $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i c_i$. Описанный способ является сочетанием метода 1 со способом поразрядного умножения.

Одновременные вычисления здесь возможны только тогда, когда сомножители b_i одни и те же для всех одновременно вычисляемых сумм.

Рассмотрим теперь сочетание метода 1 со способом дополнительных карт. Образуем массив М, состоящий из $k(t+1)$ карт π_{iq} $(i=1, 2, \ldots, k;\ q=0, 1, \ldots, t)$. Карта π_{iq} содержит в секторе g индекс i, в секторе $\bar{g}$ — номер q, в секторах g_a и g_b соответственно числа a_i и b_i и в колонке λ — значение $\eta_{q,i}$. Массив М упорядочиваем сначала по сектору g_b, а затем по сектору $\bar{g}$ — в обоих случаях в порядке убывания. После этого массив М табулируется с коммутацией (3) с автоконтролем частных групп по колонкам сектора g_b и общих групп по колонкам сектора $\bar{g}$. При каждой перемене признака частной группы вводится ход $\sigma_2 \to \sigma_1$, а при каждой перемене признака общей группы — ход $(\sigma_1)_1$, $\sigma_2 \rightrightarrows \sigma_2$. Исключение составляет последняя перемена признака общей группы, связанная с исчерпанием всех карт массива М. Здесь ход $(\sigma_1)_1$ не вводится. Вместо него происходит печать данных счетчика σ_1 и последующее гашение σ_1 и σ_2. Селектор S_1 управляется по колонке λ. Эта табуляция дает в счетчике σ_1 нужную сумму.

Сочетание способов дополнительных карт и поразрядного умножения доставляет нам третий путь образования нужных сумм. В этом случае помимо c_i в двоичной системе следует представить и $b_i = 2^t\varepsilon_{t,i} + 2^{t-1}\varepsilon_{t-1,i} + \ldots + 2^q\varepsilon_{q,i} + \ldots + \varepsilon_{0,i}$. Массив $\overline{M}$ состоит из $k(t+1)$ карт π_{iq}. Карта π_{iq} содержит в секторах g и $\overline{g}$ соответственно i и q, в секторе g_a — число a_i, в колонках $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — значения $\varepsilon_{0,i}$, $\varepsilon_{1,i}, \ldots, \varepsilon_{t,i}$ и в колонке λ — значение $\eta_{q,i}$. Массив M упорядочивается по сектору $\overline{g}$ в порядке убывания и табулируется с коммутацией (занимаются селекторы S, S_1 и счетчик σ_1)

$$g_a \to C, \qquad (X) \to C_1, \qquad (X)_1 \to \sigma_1. \tag{4}$$

Автоконтроль устанавливается по колонкам сектора g и вводится ход $(\sigma_1)_1$ при каждой перемене контрольного признака. Селектор S управляется по колонке λ. Управление же селектором S_1 — переменное для каждой табуляции. Сначала S_1 управляется по колонке λ_t (первая табуляция), затем по колонке λ_{t+1} (вторая табуляция) и т. д. После последней табуляции ход $(\sigma_1)_1$ не происходит, а вместо него вводится печать и гашение данных счетчика σ_1. В результате табуляций мы получаем в счетчике σ_1 сумму тройных произведений.

Наконец, сочетание обоих способов, основанных на двоичных представлениях, с методом 1 позволяет вычислять суммы $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i c_i d_i$. Пусть b_i и c_i, как и выше, представлены по двоичной системе. Образуем массив M, состоящий из $k(t+1)$ карт. Карта π_{iq} этого массива в дополнение к описанному в предыдущем пункте содержанию карты π_{iq} несет на себе в секторе g_d число d_i. Массив M упорядочивается (в убывающем порядке) сначала по сектору g_d и затем по сектору $\overline{g}$ и подвергается в таком виде серии табуляций с коммутацией (занимаются селекторы S и S_1 и счетчики σ_1 и σ_2):

$$g_a \to C, \qquad (X) \to C_1, \qquad (X)_1 \to \sigma_2. \tag{5}$$

Автоконтроль частных групп устанавливается по колонкам g_d, общих групп — по $\overline{g}$. При каждой перемене признака частной группы вводится ход $\sigma_2 \to \sigma_1$, а при каждой перемене признака общей группы — ход $(\sigma_1)_1$, $\sigma_2 \rightleftarrows \sigma_2$. Управление селекторами S и S_1 осуществляется, как в предыдущем пункте. По окончании всех табуляций в счетчике σ_1 образуется нужная сумма. Одновременно при этом способе можно вычислять суммы вида $\sum_{i=1}^{k} a_i^{(\nu)} b_i^{(\nu)} c_i^{(\nu)} d_i$.

Поступило
23 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Янжул, Усп. матем. наук, 1, в. 2 (1946). [2] И. Я. Акушский, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 20 (1947). [3] И. Я. Акушский, ДАН, 59, № 9 (1948).