Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

*МАТЕМАТИКА*

Ф. И. ФРАНКЛЬ

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧАПЛЫГИНА

*(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 25 IV 1947)*

С. А. Чаплыгин в работе (1) ввел решения уравнений газодинамики вида $\psi_n = z_n(\tau)\sin 2n\theta$ ($\tau = w^2/w_{\max}^2$, $w$ — модуль скорости, $w_{\max}$ — максимальная скорость истечения). При исследовании смешанных до- и сверхзвуковых течений особенно интересно отношение $z_n(\tau)/z_n(\tau^*)$, где $\tau^* = (\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)$.

В нашей работе (2) мы нашли асимптотическое разложение величины $z'_n(\tau^*)/z_n(\tau^*)$ вида

$$\frac{z'_n(\tau^*)}{z_n(\tau^*)} = n^{2/3}(A_0 + A_1 n^{-2/3} + \ldots + A_k n^{-2k/3}) + \frac{O(1)}{n^{2k/3}}. \qquad (1)$$

Практически оказалось, что при применении четырех членов эта формула дает точный четвертый знак после запятой, начиная с $n=4$, а при $n=1$ ошибка равна $\sim 0{,}01$ (3).

Этот результат может быть усилен: мы докажем асимптотическую формулу вида

$$\frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau^*)} = \zeta_n(\eta) = \lambda(n^{2/3}\eta) + \frac{\lambda^{(1)}(n^{2/3}\eta)}{n^{2/3}} + \ldots + \frac{\lambda^{(k)}(n^{2/3}\eta)}{n^{2k/3}} + \frac{\Lambda_n^{(k+1)}(n^{2/3}\eta)}{n^{2(k+1)/3}} \qquad (2)$$

с оценкой остаточного члена и его производной:

$$|\Lambda_n^{(k+1)}(\xi)| < A^{(k+1)}, \quad |\Lambda_n^{(k+1)'}(\xi)| < A^{(k+1)}. \qquad (2a)$$

При этом $\eta = \left[\frac{3}{4}\int\limits_{\tau}^{\tau^*}\sqrt{\frac{1-\tau/\tau^*}{1-\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau}\right]^{2/3}$.

Формула (2) верна при $\eta \geqslant 0$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*)$.

Функция $\zeta_n(\eta)$ определяется из условий:

$$\zeta''_n(\eta) + b(\eta)\zeta'_n(\eta) - n^2\eta\zeta_n(\eta) = 0, \qquad \zeta_n(0) = 1, \qquad \zeta_n(+\infty) = 0, \qquad (3)$$

где

$$b(\eta) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\eta}\ln\frac{K}{\eta} = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots, \qquad K = \frac{1-\tau/\tau^*}{(1-\tau)^{1/\tau^*}}. \qquad (4)$$

Функция $\lambda(\xi)$ — это функция Эйри (4), определяемая из условий:

$$\lambda''(\xi) - \xi\lambda(\xi) = 0, \qquad \lambda(0) = 1, \qquad \lambda(+\infty) = 0.$$

Функция $\lambda^{(i)}(\xi)$ определяются из условий:

$$\lambda^{(i)''}(\xi)-\xi\lambda^{(i)}(\xi)=q_i(\xi), \qquad \lambda^{(i)}(0)=\lambda^{(i)}(+\infty)=0, \tag{5}$$

где

$$q_i(\xi)=-[b_{i-1}\xi^{i-1}\lambda'(\xi)+b_{i-2}\xi^{i-2}\lambda^{(1)'}(\xi)+\ldots+b_0\lambda^{(i-1)'}(\xi)]. \tag{5a}$$

Пользуясь методом понижения порядка, получим:

$$\lambda^{(i)}(\xi)=\lambda(\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\lambda^2(\xi')}\int\limits_{\infty}^{\xi'}\lambda(\xi'')q_i(\xi'')\,d\xi''. \tag{6}$$

В самом деле, эта формула дает $\lambda^{(i)}(0)=0$.

Уравнение $\lambda^{(i)}(\infty)=0$ доказываем рекуррентно одновременно с доказательством оценок вида

$$|\lambda^{(i)}(\xi)|<A\lambda^{\varepsilon}(\xi), \qquad |\lambda^{(i)'}(\xi)|<A\lambda^{\varepsilon}(\xi), \tag{7}$$

где $\varepsilon$ — любое число, удовлетворяющее неравенству $0<\varepsilon<1$.

Вторая формула (7) выполнена для $\lambda(\xi)$:

$$|\lambda'(\xi)|=\int\limits_{\xi}^{\infty}\xi'\lambda(\xi')\,d\xi'=\lambda^{\vartheta}(\xi)\int\limits_{\xi}^{\infty}\left(\frac{\lambda(\xi')}{\lambda(\xi)}\right)^{\vartheta}\lambda^{1-\vartheta}(\xi')\xi'\,d\xi'<$$

$$<\lambda^{\vartheta}(\xi)\int\limits_{\xi}^{\infty}\lambda^{1-\vartheta}(\xi')\xi'\,d\xi'<A\lambda^{\vartheta}(\xi) \qquad (1>\vartheta>0).$$

Если формулы (7) выполнены для $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(i-1)}$, то отсюда следует формула вида

$$|q_i(\xi)|<A(1+\xi^{i-1})\lambda^{\vartheta}(\xi)=$$

$$=A(1+\xi^{i-1})\lambda^{\vartheta-\delta}(\xi)\lambda^{\delta}(\xi)<A_1\lambda^{\delta}(\xi) \qquad (1>\vartheta>\delta>0). \tag{8}$$

Но тогда формула (6) дает для $\lambda^{(i)}(\xi)$ оценку:

$$|\lambda^{(i)}(\xi)|\leqslant\lambda^{\varepsilon}(\xi)\left|\int\limits_0^{\xi}\frac{\lambda^{1-\varepsilon}(\xi)}{\lambda^{1-\varepsilon}(\xi')}\,d\xi'\int\limits_{\infty}^{\xi'}\frac{\lambda^{1+\varepsilon}(\xi'')}{\lambda^{1+\varepsilon}(\xi')}A_1\lambda^{\delta-\varepsilon}(\xi'')\,d\xi''\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_1\lambda^{\varepsilon}\xi\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\xi'}^{\infty}\lambda^{\delta-\varepsilon}(\xi'')\,d\xi''d\xi'<B\lambda^{\varepsilon}(\xi), \qquad \delta>\varepsilon>0.$$

Наконец, имеем

$$|\lambda^{(i)'}(\xi)|=\left|\int\limits_{\xi}^{\infty}[q_i(\xi')+\xi'\lambda^{(i)}(\xi')\,d\xi'\right|\leqslant A\int\limits_{\xi}^{\infty}[\lambda^{\varepsilon}(\xi')+\xi'\lambda^{\varepsilon}(\xi')]\,d\xi'=$$

$$=A\lambda^{\varkappa}(\xi)\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{\lambda^{\varkappa}(\xi')}{\lambda^{\varkappa}(\xi)}\lambda^{\varepsilon-\varkappa}(\xi')(1+\xi')\,d\xi'\leqslant\overline{A}\lambda^{\varkappa}(\xi), \qquad \varepsilon>\varkappa>0.$$

Таким образом, формула $\lambda^{(i)}(+\infty)=0$ доказана. Одновременно с этим доказано, что $\lambda^{(i)}(\xi)$ стремится в бесконечности к нулю быстрее, чем любая отрицательная степень. Кроме того, если учесть формулы (5а) и (6), а также формулу

$$\lambda^{(i)\prime}(\xi)=\lambda'(\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\lambda^2(\xi')}\int\limits_{\infty}^{\xi'}\lambda(\xi'')\,q_i(\xi'')\,d\xi''+\frac{1}{\lambda(\xi)}\int\limits_{\infty}^{\xi}\lambda(\xi')\,q_i(\xi')\,d\xi',$$

то видно, что $\lambda^{(i)}(\xi)$ является суммой конечного числа положительных и убывающих (быстрее, чем любая отрицательная степень $\xi$) функций $\xi$, взятых со знаком плюс или минус.

Перейдем к оценке остаточного члена $\Lambda_n^{(k+1)}(\xi)$ и его производной. Имеем:

$$\Lambda_n^{(k+1)\prime\prime}(\xi)-\xi\Lambda_n^{(k+1)}(\xi)+\frac{\left(b\,\frac{\xi}{n^{2/3}}\right)}{n^{2/3}}\Lambda_n^{(k+1)\prime}(\xi)=$$

$$=-\{\xi^k\,\delta_k^*\,b(n^{-2/3}\xi)\,\lambda'(\xi)+\xi^{k-1}\,\delta_{k-1}^*\,b(n^{-2/3}\xi)\,\lambda^{(1)\prime}(\xi)+\ldots$$

$$\ldots+b(n^{-2/3}\xi)\,\lambda^{(k)\prime}(\xi)\}=F_n^{(k+1)}(\xi), \tag{9}$$

где $b(\eta)=b_0+b_1\eta+\ldots+b_{i-1}\eta^{i-1}+\eta^i\delta_i^*\,b(\eta)$, функции $b(\eta)$ и $\delta_i^*\,b(\eta)$ ограничены.

Решение однородного уравнения

$$\Lambda''(\xi)-\xi\Lambda(\xi)+n^{-2/3}\,b(n^{-2/3}\xi)\,\Lambda'(\xi)=0, \tag{10}$$

определяемое краевыми условиями $\Lambda(0)=1$, $\Lambda(+\infty)=0$, совпадает с $\zeta_n(n^{-2/3}\xi)$ (см. уравнение (2)). Согласно С. А. Чаплыгину ([1]), эта функция — убывающая при $\xi>0$. $|\zeta_n'(\eta)|$ также убывающая функция при $\eta>0$.

Следовательно, получим, применяя метод понижения порядка,

$$\Lambda_n^{(k+1)}(\xi)=\zeta_n(n^{-2/3}\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\zeta_n^2(n^{-2/3}\xi')\,(n^{-2/3}\xi')}\int\limits_{\infty}^{\xi'}F_n^{(k+1)}(\xi'')\,\zeta_n(n^{-2/3}\xi'')\,B\,(n^{-2/3}\xi'')d\xi'',$$

где $B=\sqrt{K/\eta}$.

Отсюда, учитывая, что $\zeta_n$ и $B$ — убывающие функции, получим:

$$|\Lambda_n^{(k+1)}(\xi)|<\int\limits_0^{\xi}d\xi'\int\limits_{\xi'}^{\infty}|F_n^{(k+1)}(\xi'')|\,d\xi''<A^{(k+1)}. \tag{11}$$

Эта оценка не зависит от $n$.

Для $\Lambda_n^{(k+1)\prime}(\xi)$ имеем

$$\Lambda_n^{(k+1)\prime}(\xi)=$$

$$=n^{-2/3}\zeta_n'(n^{-2/3}\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\zeta_n^2(n^{-2/3}\xi')B(n^{-2/3}\xi')}\times\int\limits_0^{\xi'}F_n^{(k+1)}(\xi'')\,\zeta_n(n^{-2/3}\xi'')\,B(n^{-2/3}\xi'')\,d\xi''+$$

$$+\frac{1}{\zeta_n(n^{-2/3}\xi)\,B(n^{-2/3}\xi)}\int\limits_{\infty}^{\xi}F_n^{(k+1)}(\xi')\,\zeta_n(n^{-2/3}\xi')\,B(n^{-2/3}\xi')\,d\xi', \tag{12}$$

откуда

$$|\Lambda_n^{(k+1)'}(\xi)| < n^{-2/3}\int\limits_0^{\xi}\left|\frac{\zeta_n'(n^{-2/3}\xi')}{\zeta_n(n^{-2/3}\xi')}\right|d\xi'\int\limits_{\xi'}^{\infty}|F_n^{(k+1)}(\xi'')|\,d\xi''+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{\infty}|F_n^{(k+1)}(\xi')|\,d\xi'. \tag{13}$$

Но для логарифмической производной $\zeta_n'(\eta)/\zeta_n(\eta)$ имеем, согласно С. А. Чаплыгину ([1]), оценку

$$\frac{\zeta_n'(\eta)}{\zeta_n(\eta)}=\frac{n}{\tau}\,\frac{d\tau}{d\eta}\left\{\sqrt{1-2\beta\frac{\tau}{1-\tau}+\vartheta\,\frac{\tau}{1-\tau}\sqrt[3]{\frac{4\beta^2(2\beta+1)}{n}}}\right\}\ \text{при}\ \eta>0, \tag{14}$$

где $\beta=1/(\varkappa-1)$, $\quad 0<\vartheta<1$.

Имеем, очевидно,

$$1-2\beta\frac{\tau}{1-\tau}<A\eta,\qquad \frac{d\ln\tau}{d\eta}<A(\sqrt{\eta}+1),$$

откуда

$$\left|\frac{\zeta_n'(\tau)}{\zeta_n(\eta)}\right|<Cn(\sqrt{\eta}+1)(\sqrt{\eta}+n^{-1/3})=Cn^{-2/3}\left(1+\frac{\sqrt{\xi}}{n^{1/3}}\right)(1+\sqrt{\xi}), \tag{15}$$

и, наконец:

$$|\Lambda_n^{(k+1)'}(\xi)|<A^{(k+1)}. \tag{16}$$

независимо от $n$. Таким образом, асимптотическая формула (2), (2а) доказана.

Поступило
25 IV 1947

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Собр. соч., II, 194. (1934). [2] Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР сер. матем., 9, 387 (1945). [3] Ф. И. Франкль, ДАН, 58, № 3 (1947). [4] В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, М., 1946.