Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. С. ФЕДОРОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 23 V 1947)

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, однозначные и непрерывные в некоторой односвязной области Δ; пусть E — множество всех простых замкнутых и спрямляемых кривых, расположенных в Δ; пусть (L) — конечная область, ограниченная кривой L из E и σ — площадь этой области. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность всяких таких замкнутых простых и спрямляемых кривых, что: 1) всякая область (c_n) содержит точку $z=0$, $z=x+iy$, внутри себя; 2) диаметр кривой c_n стремится к нулю, когда $n\to\infty$ (мы не предполагаем, что c_n находится внутри Δ). Если c_n определяется уравнениями $x=\varphi_n(t)$, $y=\psi_n(t)$, то будем обозначать для всякой точки $z_0=x_0+iy_0$ через $c_n(z_0)$ следующую кривую: $x=\varphi_n(t)+x_0$, $y=\psi_n(t)+y_0$. Обозначаем через σ_n площадь (c_n). Полагаем для всякой кривой L множества E

$$I(L)=\oint_L Pdx+Qdy,$$

где интеграл берется по кривой L в положительном направлении.

Теорема. *Если даются кривая L множества E и функции P и Q, то можно выбрать из всякой последовательности $\{c_n\}$ такую подпоследовательность $\{c_{n_k}\}$, что существуют внутри (L) последовательности точек $\{\zeta_k\}$, $\{\zeta'_k\}$ и $\{\zeta''_k\}$ со следующими свойствами: если положить $\lambda_k=c_{n_k}(\zeta_k)$, $\lambda'_k=c_{n_k}(\zeta'_k)$, $\lambda''_k=c_{n_k}(\zeta''_k)$, $\sigma'_k=$ площади (λ_k), тогда будем иметь*

$$\frac{I(L)}{\sigma}>\frac{I(\lambda'_k)}{\sigma'_k},\quad \frac{I(L)}{\sigma}=\frac{I(\lambda_k)}{\sigma'_k},\quad \frac{I(L)}{\sigma}<\frac{I(\lambda''_k)}{\sigma'_k}\tag{1}$$

за исключением тех случаев, когда $I(L)=c\cdot\sigma$ для всех кривых L в области Δ, где c — постоянная).*

Замечаем, что существуют такие функции P и Q, непрерывные на всей плоскости, и такая последовательность $\{c_n\}$, что имеем $I(c_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$. Соотношения (1) получаются при сдвигах кривых c_n. Заметим еще, что всегда существует бесконечная последовательность областей (λ_k), расположенных внутри (L) и попарно без общих точек (таково же свойство областей (λ'_k) и (λ''_k)).

Следствие. *Пусть $f(z)$ однозначна и непрерывна внутри некоторой области Δ. Если существует такая последовательность*

---

* По крайней мере, за исключением тех случаев, когда $I(L')=c\cdot\sigma'$ для всех кривых L' множества E, расположенных в (L), где σ' — площадь (L'), c — постоянная и L — данная кривая.

$\{c_n\}$, что для всякой точки ζ внутри Δ и для всякой последовательности $\zeta_n \to \zeta$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n} \oint_{c_n(\zeta_n)} f(z)\,dz = 0$$

*при условии, что ζ находится внутри каждой области $(c_n)(\zeta_n))$ *, тогда $f(z)$ голоморфна внутри Δ.*

Поступило
23 V 1947

* Можно взять, например, в качестве кривых c_n и $c_n(\zeta_n)$ окружности $|z| = r^u$, $|z - \zeta_n| = r_n$, где $r_n \to 0$ для $n \to \infty$.