Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. К. ФАДДЕЕВ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 IV 1947)

Естественно поставить вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять уравнение с рациональными коэффициентами для того, чтобы оно было характеристическим уравнением рациональной симметрической матрицы. Для уравнений второй степени вопрос решается элементарно, необходимым и достаточным условием оказывается представимость дискриминанта уравнения в виде суммы двух квадратов рациональных чисел. Столь же просто доказывается, что любое приводимое уравнение третьей степени с вещественными корнями является характеристическим для некоторой рациональной симметрической матрицы. При этом нужно воспользоваться тем, что каждое рациональное число есть сумма четырех квадратов рациональных чисел. Для неприводимых уравнений третьей степени имеется необходимое и достаточное условие Д. С. Горшкова (1), но оно не допускает простой проверки. В моей работе (2) в качестве достаточного условия указывается представимость дискриминанта уравнения формой x^2+2y^2.

В настоящей заметке дается еще одно, довольно широкое, достаточное условие, применимое к уравнениям до седьмой степени.

Пусть α есть корень неприводимого уравнения степени n, и пусть при этом α является характеристическим числом рациональной симметрической матрицы A. Тогда $f(\alpha)$, где f — любая рациональная функция, будет корнем симметрической матрицы $f(A)$, так что все числа поля $k=R(\alpha)$, получающегося присоединением α к полю рациональных чисел R, являются вместе с α характеристическими числами рациональных симметрических матриц. Посредством соответствия $f(\alpha)\to f(A)$ осуществляется изоморфное отображение поля k на некоторое поле рациональных симметрических матриц.

Пусть теперь поле $k=R(\alpha)$ вещественно вместе с сопряженными и пусть выбрана определенная нумерация $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ чисел, сопряженных с α. Последовательность знаков $(\operatorname{sgn}\beta, \operatorname{sgn}\beta', \ldots, \operatorname{sgn}\beta^{(n-1)})$ будем называть просто знаком числа $\beta\in k$. Очевидно, что в поле k существуют числа с любым знаком из всех 2^n возможных.

Число $\lambda\in k$ называется сингулярным, если главный идеал (λ) есть квадрат некоторого идеала.

Теорема. *Если в поле $k=R(\alpha)$ степени $n\leqslant 7$, вещественном вместе с сопряженными, существуют сингулярные числа, имеющие любые знаки, то все числа поля k являются характеристическими для некоторых симметрических рациональных матриц порядка n. При этом возможно такое изоморфное отображение k в некоторое поле симметрических матриц, что целым числам k соответствуют целочисленные матрицы.*

Доказательство. Пусть O — кольцо целых чисел поля k, O^* — идеал, обратный дифференте поля. По известной теореме E. Hecke ((3), теорема 176), O^* эквивалентен квадрату некоторого идеала. $O^* = \mu\mathfrak{b}^2$. В силу условия теоремы, в k найдется сингулярное число λ, $(\lambda) = \mathfrak{c}^2$, имеющее одинаковый знак с μ. Очевидно, $O^* = \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2$. Обозначим $\frac{\mu}{\lambda} = \gamma$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$. Число γ положительно вместе с сопряженными в силу выбора λ. Умножив последнее равенство на $\mathfrak{a}^{-1}$, получим $\mathfrak{a}^{-1}O^* = \gamma\mathfrak{a}$.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — какой-либо базис $\mathfrak{a}$. Тогда в качестве базиса идеала $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^{-1}O^*$ можно взять числа $\gamma\omega_1, \ldots, \gamma\omega_n$. Но, с другой стороны, за базис $\mathfrak{a}^*$ можно принять числа $\omega_1^*, \ldots, \omega_n^*$, определенные посредством уравнений $\operatorname{sp}\omega_i\omega_j^* = \delta_{ij}$ ((3), теорема 101). Эти два базиса связаны унимодулярной подстановкой с целыми коэффициентами:

$$V\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\omega_j^*.$$

Умножим обе части этого равенства на ω_k и сравним следы. Получим $a_{ik} = \operatorname{sp}\gamma\omega_i\omega_k$, откуда следует, что матрица (a_{ik}) симметрическая.

Рассмотрим квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij}x_ix_j = \operatorname{sp}\gamma(x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n)^2$. Эта форма положительна в силу положительности γ вместе с сопряженными, имеет целые коэффициенты a_{ij} и имеет детерминант, равный 1. При $n \leqslant 7$ существует только один класс положительных квадратичных форм с целыми коэффициентами и детерминантом 1, именно, класс форм, эквивалентных сумме квадратов. Следовательно, существует унимодулярная подстановка $x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,z_j$, преобразующая форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ в $z_1^2 + \cdots + z_n^2$. Далее, $x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n = z_1\psi_1 + \cdots + z_n\psi_n$, где $\psi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\omega_j$. Числа $\psi_1, \ldots, \psi_n$ снова образуют базис идеала $\mathfrak{a}$, обладающий свойством $\operatorname{sp}\gamma(z_1\psi_1 + \cdots + z_n\psi_n)^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$, и, следовательно, $\operatorname{sp}\gamma\psi_i\,\psi_j = \delta_{ij}$.

Пусть теперь β — любое число поля k. Выразим числа $\beta\psi_1, \ldots, \beta\psi_n$ через $\psi_1, \ldots, \psi_n$:

$$\beta\psi_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\psi_j. \tag{*}$$

Матрица $B_\beta = (b_{ij})$ рациональна при любом $\beta \in k$ и составлена из целых чисел при целом β, так как $\psi_1, \ldots, \psi_n$ есть базис идеала кольца O. Число β, очевидно, является характеристическим числом матрицы B_β, и соответствие $\beta \to B_\beta$ есть изоморфное отображение поля k на некоторое поле матриц. Покажем, что все матрицы B_β симметрические. С этой целью умножим равенство (*) на $\gamma\psi_k$ и сравним следы от обеих частей. Получим: $b_{ik} = \operatorname{sp}\beta\gamma\psi_i\psi_k$, откуда ясно, что $b_{ik} = b_{ki}$. Теорема доказана.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило
28 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. С. Горшков, ДАН, 31, № 9 (1941). [2] Д. К. Фаддеев, ДАН, 47, № 8 (1945). [3] Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, 1940.