Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. П. ТОЛСТОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 IX 1947)

Будем предполагать функцию $F(x, y)$ определенной в прямоугольнике R $(a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d)$. Каковы структурные свойства этой функции, если нам известно, что она обладает конечной частной производной по одной из переменных?

Поставленному условию удовлетворяет, например, функция $xf(y)$, где f — совершенно произвольна. Следовательно, вряд ли можно сказать что-нибудь больше того, что поставленному условию удовлетворяют функции „почти" произвольной структуры. В нашем примере $\partial F/\partial x = f(y)$. Поэтому сделанное замечание относится и к структуре частной производной.

Мы потребуем теперь существования у $F(x, y)$ конечной частной производной по каждой из переменных. Это требование сразу резко сужает класс изучаемых функций.

Прежде всего, в силу известного предложения В. В. Степанова, $F(x, y)$ в нашем случае почти всюду обладает полным апроксимативным дифференциалом (1). Помимо этого, из существования конечных частных производных следует непрерывность $F(x, y)$ вдоль всякой прямой, параллельной какой-нибудь из осей координат. Доказывается, что всякая функция двух переменных, обладающая этим свойством, есть функция класса не выше первого по классификации Бэра (3).

Заметим, кстати, любопытный факт: если от функции $F(x, y)$ требовать не непрерывности ее вдоль всякой параллели той или иной оси координат, а лишь потребовать, чтобы ее значения вдоль всякой такой параллели образовывали функцию (одной переменной), принадлежащую к первому классу, то $F(x, y)$, может быть неизмеримой (поверхностно).

Так В. Серпинский (2) дал пример неизмеримой функции, имеющей на любой параллели одной или другой из осей координат не более одной точки разрыва (характеристическая функция для неизмеримого множества, встречаемого всякой прямой, параллельной одной или другой координатой оси, не более чем в одной точке).

Вернемся к функциям, удовлетворяющим поставленным нами условиям. Всякая такая функция $F(x, y)$, будучи функцией класса не выше первого, имеет точки непрерывности, образующие множество всюду второй категории. С другой стороны, очень легко построить пример функции $F(x, y)$, допускающей сколько угодно производиых и разрывной на множестве положительной меры.

Естественно поставить вопрос: может ли $F(x, y)$ быть разрывной почти всюду? Из следующего предложения вытекает отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Если $F(x, y)$ всюду (или за исключением счетного множества точек) обладает конечными частными производными (или производными числами), то на каждом совершенном множестве найдется порция, на которой $F(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, непрерывна.*

Заметим, что функция, непрерывная вдоль всевозможных параллелей осям координат, но лишенная частных производных, может быть разрывной почти всюду.

Обратимся теперь к свойствам частных производных.

Из высказанного ранее следует, что в наших условиях функция $\partial F/\partial x$ (или $\partial F/\partial y$) есть функция класса не выше второго. Следующее предложение содержит более точный и более общий результат.

Теорема 2. *Если $F(x, y)$ обладает n-й производной по одной из переменных и непрерывна по другой переменной при каждом фиксированном значении первой, то эта производная есть функция класса не выше первого.*

Возникает вопрос: будет ли справедлива эта теорема, если рассматривать какую-нибудь смешанную производную? Ответ получаем отрицательный, так как можно построить пример функции, для которой производная $\partial^2 F/\partial x\partial y$ есть функция второго класса. При этом построение можно осуществить так, чтобы всюду выполнялось соотношение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

Тем не менее, из теоремы 2 легко следует

Теорема 3. *Если $F(x, y)$ допускает всевозможные (в том числе и смешанные) производные до порядка m включительно, то все эти производные суть функции класса не выше первого.*

В связи с рассмотрением частных производных высших порядков возникает такая важная задача: если существуют обе производные, фигурирующие в равенстве (1), должно ли выполняться это равенство, хотя бы почти всюду?

Ответ получается отрицательный: мы умеем построить пример функции $F(x, y)$, допускающей непрерывные первые частные производные и обладающей всюду обоими вторыми смешанными производными, для которых равенство (1) не имеет места на множестве плоской положительной меры.

Можно показать, что при наличии упомянутых смешанных производных всюду нельзя построить пример так, чтобы равенство (1) нарушалось почти всюду. Если же ограничиться существованием смешанных производных почти всюду, то такой пример построить можно.

Следующие предложения дают условия, при которых смешанные производные, взятые в различных порядках, совпадают.

Теорема 4. *Если $F(x,y)$ всюду (или за исключением счетного множества точек) обладает всеми вторыми производными, то почти всюду имеет место равенство* (1).

Это предложение остается справедливым, если ограничиться требованием конечности всех производных чисел (как по одной, так и по другой переменной) у функций $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$.

Из теоремы 4 легко вытекает такая

Теорема 5. *Если $F(x, y)$ допускает всевозможные частные производные до порядка m включительно, то всюду величина каждой смешанной производной порядка $< m$ не зависит от порядка дифференцирования, а для смешанных производных порядка m это свойство имеет место почти всюду.*

Можно дать достаточные условия для осуществления равенства (1) и в такой форме:

Теорема 6. *Если каждая из функций $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$ абсолютно непрерывна вдоль всякой параллели любой из осей координат, то вторые смешанные производные существуют и совпадают почти всюду.*

Отметим следующее. Если рассматривать функцию трех (или большего числа) переменных, непрерывную вдоль всевозможных прямых, параллельных осям координат, всюду допускающую конечные первые частные производные, то уже нельзя утверждать принадлежность этой функции к первому классу. Можно построить пример такой функции существенно второго класса.

Теоремы 1, 2 и 3 также перестают быть справедливыми для функций трех и большего числа переменных.

Теоремы 4, 5 и 6 справедливы для любого числа переменных, если в их формулировки ввести производные по всем переменным.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
19 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Степанов, Мат. сб., **32**, 511 (1925). [2] W. Sierpinski, Fund. Math., **1**, 112 (1920). [3] H. Lebesgue, J. Math. (1905).