Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Н. НАЗАРОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 V 1947)

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f[y, u(y), u'(y)]\, dy, \tag{1}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению, λ — параметр, а K и f — заданные функции, на которые накладываются некоторые ограничения, указываемые ниже.

К уравнениям типа (1) приводится, например, механическая задача о точном продольном изгибе стержня.

Как известно, точное дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня имеет вид:

$$y'' + \lambda p(x)[1 + y'^2]^{3/2}\, y = 0, \tag{2}$$

и это уравнение надо интегрировать при определенных граничных условиях, которые задаются способом заделки концов стержня.

Если обозначить через $K(x, y)$ функцию Грина линейного оператора $L(y) = y''$, отвечающую граничным условиям заделки стержня, то интегрирование уравнения (2) при данных граничных условиях эквивалентно решению следующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t)\, p(t)[1 + y'^2(t)]^{3/2}\, y(t)\, dt, \tag{3}$$

которое имеет вид (1).

Если рассматривать уравнение (1) при малых значениях параметра λ, то можно доказать следующие две теоремы существования.

Теорема 1. *Если выполняются условия:* 1) *функция* $f(y, u, v)$ *непрерывна по* y *в сегменте* $[0,1]$ *и для* $|u| < M$ *и* $|v| < M$ *удовлетворяет условию Липшица;* 2) *функция* $K(x, y)$ *имеет кусочно-непрерывную производную* $K'_x(x, y)$ *в квадрате* $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ *и* $\int_0^1 |K(x, y)|\, dy < B$, $\int_0^1 |K'_x(x, y)|\, dy < B$, *где* $B = \text{const}$, *то уравнение* (1) *имеет в сегменте* $[0,1]$ *единственное, непрерывное решение, стремящееся к нулю при* $\lambda \to 0$, *если только* λ *достаточно мало.*

Эта теорема может быть доказана применением принципа неподвижной точки Качополи — Банаха.

Теорема 2. *Если выполняются условия*: 1) *функция* $K(x, y)$ *имеет кусочно-непрерывную производную* $K'_x(x, y)$ *в квадрате* $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ *и существует такое число* $N = \text{const}$, *что* $|K(x, y)| < N$ *и* $|K'_x(x, y)| < N$ *в том же квадрате*; 2) *существует разложение*

$$f(y, u, v) = a_{00}(y) + a_{10}(y)u + a_{01}(y)v + a_{20}(y)u^2 + a_{11}(y)uv + \\ + a_{02}(y)v^2 + \ldots$$

при $0 \leqslant y \leqslant 1$ *и* $|u| < R, |v| < R$; 3) *функция* $f(y, u, v)$ — *интегрируемая функция по* y *в сегменте* $[0,1]$, *то уравнение* (1) *имеет единственное голоморфное решение, разложенное по степеням* λ, *которое стремится к нулю при* $\lambda \to 0$, *если только* λ *достаточно мало.*

Эта теорема может быть доказана методом Неймана, т. е. ищется решение в виде ряда

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(x) \tag{4}$$

и показывается возможность определения всех коэффициентов $u_n(x)$ и сходимость ряда (4) при малых значениях параметра λ.

Рассмотрим далее характер поведения решения уравнения (1) для конечного значения параметра $\lambda = \lambda_0$.

Введем для удобства дальнейшего следующие определения:

Определение 1. Функция двух аргументов $u(x, \lambda)$ образует непрерывное семейство решений, если $u(x, \lambda)$ непрерывна по x в сегменте $[0,1]$ для всех значений λ, принадлежащих некоторому интервалу, и, кроме того, удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Решение $u(x, \lambda_0)$ можно продолжать, если существует хотя бы одно непрерывное семейство решений $u(x, \lambda)$, к которому принадлежит и решение $u(x, \lambda_0)$.

Определение 3. Решение $u(x, \lambda_0)$ продолжается однозначно, если существует только одно семейство решений $u(x, \lambda)$, к которому принадлежит и решение $u(x, \lambda_0)$.

Определение 4. Если решение не продолжается однозначно, то точку $\lambda = \lambda_0$ назовем точкой ветвления решения.

Укажем достаточные условия для того, чтобы точка $\lambda = \lambda_0$ не была точкой ветвления решения.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет решение $u(x) = u_0(x)$.

Предположим, что ядро $K(x, y)$ имеет кусочно-непрерывную производную $K'_x(x,y)$ для $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ и интегралы

$\int_0^1 K(x, y)\,dy$, $\int_0^1 K'_x(x, y)\,dy$ существуют.

Предположим далее, что имеет место разложение:

$$f(y, u_0(y) + z, u'_0(y) + t) = A_{00}(y) + A_{10}(y)z + A_{01}(y)t + A_{20}(y)z^2 + \\ + A_{11}(y)zt + A_{02}(y)t^2 + \cdots$$

при $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $|z| < R$, $|t| < R$ и функция $f(y, u, v)$ — интегрируемая по y функция в сегменте $[0,1]$.

Рассмотрим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)[A_{10}(y)\varphi(y) + A_{01}(y)\varphi'(y)]\,dy, \tag{5}$$

которое при всех значениях λ имеет тривиальное решение. Те значения параметра λ, при которых уравнение (5) имеет нетривиальное решение, назовем характеристическими числами.

Тогда можно высказать следующую теорему:

Теорема 3. *Если уравнение* (5) *не имеет* λ_0 *характеристическим числом, то точка* $\lambda = \lambda_0$ *не может быть точкой ветвления решения уравнения* (1).

Наметим путь доказательства этой теоремы. Полагаем $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $u(x) = u_0(x) + v(x)$ в уравнении (1) и

$$v(x) = \sum^{\infty} \mu^n v_n(x),$$

тогда $v_n(x)$ удовлетворяет следующей системе линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$v(x) = \lambda_0 \int_0^1 K(x,y)\left[A_{10}(y)v_n(y) + A_{01}(y)v_n'(y)\right]dy + f_n(y), \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{6}$$

Из них последовательно можно определить все функции $v_n(x)$. Здесь $f_n(x)$ зависит от коэффициентов A и функций $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_{n-1}(x)$.

Уравнение (6) путем интегрирования по частям (допуская законность этого действия) можно привести к виду

$$v_n(x) = f_n(x) + \lambda_0 a(x) v_n(0) + \lambda_0 b(x) v_n(1) + \lambda \int_0^1 M(x,y) v_n(y)\,dy,$$
$$n = \overline{1,\infty}. \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет решение, которое дается формулой

$$v_n(x) = f_n(x) + \lambda_0 \frac{A(x,\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)} f_n(0) + \lambda_0 \frac{B(x,\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)} f_n(1) +$$
$$+ \frac{\lambda_0}{\Delta(\lambda_0)} \int_0^1 \Delta(x,y;\lambda_0) f_n(y)\,dy, \quad n = \overline{1,\infty},$$

где $A(x,\lambda)$, $B(x,\lambda)$, $\Delta(x,y;\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ — целые функции от λ и непрерывные функции от x в сегменте $[0,1]$, имеющие кусочно-непрерывные производные по x. Кроме того, $\Delta(\lambda_0) \neq 0$, ибо $\lambda = \lambda_0$ не является характеристическим числом уравнения (5). Таким образом можно построить формально ряд, определяющий функцию $v(x)$.

Покажем далее, что ряд, определяющий функцию $v(x)$, имеет конечный круг сходимости около точки $\mu = 0$.

Возьмем систему двух алгебраических уравнений

$$F_1(V,W) = -V + \mu a + C\left[\mu\left(\frac{1}{\left(1-\frac{V}{\rho}\right)\left(1-\frac{W}{\rho}\right)} - 1\right) + \right.$$
$$\left. + |\lambda_0|\left(\frac{1}{\left(1-\frac{V}{\rho}\right)\left(1-\frac{W}{\rho}\right)} - 1 - \frac{V}{\rho} - \frac{W}{\rho}\right)\right] = 0,$$
$$F_2(V,W) = W - \frac{D}{C}V + \frac{D-C}{C}a\mu = 0, \quad 0 < \rho < R.$$

Ищем решение системы в окрестности точки $\mu = 0$ в виде рядов

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n V_n, \quad W = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n W_n. \tag{8}$$

Легко заметить, что можно подобрать постоянные числа C, D и a таким образом, чтобы для всех n имели место неравенства

$$|v_n(x)| < V_n, \quad |v_n'(x)| < W_n \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Но ряды имеют конечные круги сходимости, так как

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(V,W)} = -1, \quad \text{при } V = W = \mu = 0.$$

Следовательно, ряды, определяющие $v(x)$ и $v'(x)$, имеют конечные круги сходимости около точки $\mu = 0$. А если так, то существует единственное голоморфное семейство решений, к которому принадлежит и решение $u_0(x)$. Далее можно показать, что решений, разложенных по дробным степеням разности $\lambda - \lambda_0$, в окрестности решения $u_0(x)$ нет, и, следовательно, точка λ_0 в этом случае не является точкой ветвления.

В качестве примера рассмотрим вопрос о точном продольном изгибе стержня.

Уравнение (3) при малых значениях параметра λ имеет единственное решение $y_0(x) \equiv 0$, т. е. при малых значениях сжимающей силы стержень сохраняет прямолинейную форму. Естественно спросить, при каких значениях λ происходит изменение формы стержня, т. е., когда происходит нарушение устойчивости состояния равновесия. Очевидно, таким значением параметра λ будет точка ветвления решения $y_0(x) \equiv 0$ уравнения (3).

Для данного частного случая $A_{10}(t) = 1$, $A_{01}(t) = 0$ и уравнение (5) будет

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) p(y) \varphi(y) \, dy. \tag{9}$$

Следовательно, точками ветвления решения $y_0(x) \equiv 0$ могут являться только характеристические числа линейного интегрального уравнения (9). Решение же уравнения (9) эквивалентно интегрированию дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda p(x) y = 0$$

с теми же граничными условиями, при которых интегрируется и уравнение (3). Но уравнение (10) — приближенное уравнение продольного изгиба стержня, и характеристические числа приближенной теории продольного изгиба дают точки ветвления решений точной теории.

Пусть характеристические числа уравнения (10) будут $\lambda_k \, (k = \overline{1, \infty})$. Тогда, если параметр λ лежит между 0 и λ_1, стержень имеет только прямолинейную форму. При $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ стержень имеет две формы равновесия: прямолинейную и криволинейную $y_1(x, \lambda)$. Далее нужно найти точку ветвления прямолинейной формы после λ_1, это будет λ_2, и найти точку ветвления решения $y(x, \lambda)$. Последняя точка определится как характеристическое число линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t) p(t) \left[\left(1 + y_1'^2(t, \lambda) \right)^{3/2} \varphi(t) + \frac{3}{2} \left(1 + y_1'^2(t, \lambda) \right)^{1/2} y_1(t, \lambda) \varphi'(t) \right] dt$$

и т. д. Таким образом, вопрос о форме равновесия изогнутого стержня теоретически решен полностью, но при практических вычислениях могут встретиться очень большие трудности.

Следует, правда, заметить, что для практических целей нужно уметь находить только λ_1, а это можно всегда сделать, ибо первая критическая нагрузка нелинейного случая совпадает с линейным.

Институт математики и механики
Академии Наук УзССР
г. Ташкент

Поступило
26 V 1947