Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О БАЗИСЕ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА И О СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНОЙ АДДИТИВНОСТИ И РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1947)

Пусть $\mathfrak{A}$ есть множество каких-то элементов и $\mathfrak{M}$ — семейство подмножеств множества $\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{M}$ содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество.

Мы будем рассматривать вполне аддитивные функции множества, определенные на семействе $\mathfrak{M}$, предполагая их всегда конечными для любого определенного множества из $\mathfrak{M}$ и, следовательно, имеющими ограниченную полную вариацию. Известно, что полная вариация вполне аддитивной функции множества также представляет собой вполне аддитивную функцию множества. В последующем мы будем основываться на том, что любая вполне аддитивная функция множества может быть отлична от нуля самое большее на счетном множестве взаимно не налегающих множеств, ибо иначе ее полная вариация не была бы ограничена. Полную вариацию вполне аддитивной функции множества мы будем обозначать тем же знаком, что и самую функцию, с чертой наверху.

Рассмотрим семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\lambda(e)$, определенных и конечных для любого $e \subset \mathfrak{M}$, где λ — параметр. О мощности всевозможных значений параметра λ мы не будем делать никаких предположений.

Определения. 1. Семейство $\mathfrak{N}$ обладает свойством равномерной аддитивности если, какова бы ни была сумма $e_1 + e_2 + \cdots$ взаимно не налегающих множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}$, $\Phi_\lambda(e_{n+1} + e_{n+2} + \cdots)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n равномерно относительно параметра λ.

2. Вполне аддитивная неотрицательная функция множества $M(e)$, определенная и конечная на семействе множеств $\mathfrak{M}$, называется базисом семейства $\mathfrak{N}$, если условия $e \subset \mathfrak{M}$, $M(e) = 0$ влекут равенство $\Phi_\lambda(e) = 0$ для любого λ ([1]).

3. Семейство $\mathfrak{N}$ обладает свойством равностепенной непрерывности относительно базиса $M(e)$, если $\Phi_\lambda(e) \to 0$ равномерно относительно λ и $e \subset \mathfrak{M}$, когда $M(e) \to 0$.

Простейшие примеры показывают, что базис семейства $\mathfrak{N}$ может не существовать, если множество функций, входящих в $\mathfrak{N}$, неисчислимо. В этой работе доказывается, что базис необходимо существует, если соответствующее семейство $\mathfrak{N}$ имеет свойство равномерной аддитивности, откуда вытекает, что свойства равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{N}$ эквивалентны. Установлены, кроме того, необходимые и достаточные условия существования базиса.

Результаты будут иметь значение в теории интегральных уравнений и, как мне кажется, также в других вопросах.

Теорема 1. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\lambda(e)=\Phi(\lambda, e)$, обладающее свойством равномерной аддитивности, где λ — параметр, $e \subset \mathfrak{M}$. Тогда не существует подразделения $\mathfrak{A}=e_\alpha+e_\beta+\cdots$ пространства $\mathfrak{A}$ на несчетное множество взаимно не налегающих множеств $e_\alpha, e_\beta, \ldots$, принадлежащих $\mathfrak{M}$, на каждом из которых по меньшей мере одна из функций семейства $\mathfrak{N}$ отлична от нуля.*

Доказательство: Предположим противное, т. е. что существует несчетное подразделение $\mathfrak{A}=e_\alpha+e_\beta+\cdots$, возможность которого опровергается рассматриваемой теоремой. Обозначим через $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \cdots$ значения параметра λ, для которых выполняются условия $\Phi(\lambda_\alpha, e_\alpha)\neq 0$, $\Phi(\lambda_\beta, e_\beta)\neq 0, \ldots$ Нетрудно убедиться, что тогда будет существовать постоянное положительное число a такое, что для несчетной подпоследовательности $e_{\alpha^*}, e_{\beta^*}, \ldots$ последовательности множеств $e_\alpha, e_\beta, \ldots$ будут выполняться неравенства

$$|\Phi(\lambda_{\alpha^*}, e_{\alpha^*})|>a, \quad |\Phi(\lambda_{\beta^*}, e_{\beta^*})|>a, \ldots .$$

Обозначим через s несчетную последовательность функций $\Phi(\lambda_{\alpha^*}, e)$, $\Phi(\lambda_{\beta^*}, e), \ldots$, где e — переменное множество из $\mathfrak{M}$, и через σ_1 — соответствующую последовательность множеств $e_{\alpha^*}, e_{\beta^*}, \ldots$. Обозначим затем через g_1 какое-либо из множеств, входящих в σ_1, и через $\varphi_1(e)$ — соответствующую функцию множества из последовательности s, т. е. функцию, для которой выполняется неравенство $|\varphi_1(g_1)|>a$. Удалим из последовательности σ_1 все множества, для которых функция $\varphi_1(e)$ отлична от нуля, и оставшуюся несчетную последовательность множеств обозначим через σ_2. Возьмем какое-либо множество, входящее в σ_2, и обозначим его через g_2. Обозначим, кроме того, через $\varphi_2(e)$ ту из функций, входящих в последовательность s, для которой выполняется условие $|\varphi_2(g_2)|>a$. Аналогично, удалив из последовательности σ_2 те множества, для которых $\varphi_2(e)\neq 0$, рассмотрим какой-либо элемент g_3 оставшейся несчетной последовательности множеств σ_3 и приведем ему в соответствие функцию $\varphi_3(e)$ из последовательности s, для которой $|\varphi_3(g_3)|>a$.

Продолжая этот процесс и применяя метод полной индукции, мы получим счетную последовательность $\varphi_1(e), \varphi_2(e), \ldots$ функций множества, принадлежащих s, и счетную последовательность $g_1, g_2, \ldots$ взаимно не налегающих множеств, принадлежащих σ_1, для которых будут выполняться условия $|\varphi_i(g_i)|>a$, $\varphi_i(g_j)=0$ при $i<j$ $(i=1, 2, \ldots)$. Рассмотрим теперь сумму $g_1+g_2+\cdots$ и ее остаток $r_n=g_{n+1}+$ $+g_{n+2}+\cdots$. Очевидно, $|\varphi_i(r_n)|=|\varphi_i(g_i)|>a$ при $i=n+1$.

Следовательно, $\varphi_i(r_n)$ не может стремиться к нулю равномерно относительно индекса i при $n\to\infty$, что противоречит предположению о равномерной аддитивности семейства $\mathfrak{N}$. Рассматриваемая теорема, таким образом, доказана.

Теорема 2. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\lambda(e)$, определенных на семействе множеств $\mathfrak{M}$, обладающее свойством равномерной аддитивности, где λ — параметр. Тогда семейство $\mathfrak{N}$ обладает базисом.*

Доказательство. Рассмотрим определенную функцию $\Phi_\lambda(e)$ из семейства $\mathfrak{N}$ и ее полную вариацию $\varphi(e)=\overline{\Phi}_\lambda(e)$ на множестве e. Допустим, что $\varphi(\mathscr{E})\neq 0$, где $\mathscr{E}$ — определенное множество из семейства $\mathfrak{M}$. Условимся говорить, что множество e обладает свойством (A), если: 1) $e\subset\mathfrak{M}$ $e\subset\mathscr{E}$; 2) $\varphi(e)=0$; 3) по меньшей мере одна из функций семейства $\mathfrak{N}$ не равна нулю для этого множества e. Расположим все множества, обладающие свойством (A), в некоторую вполне упорядоченную последовательность, после чего, переходя от каждого множества к следующему и применяя трансфинитную индукцию, удалим из этой последовательности все множества, имеющие общие точки с предыдущими множествами, которые не подверглись удалению. Пусть $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ будет оставшаяся последовательность взаимно не налегающих множеств, обладающих свойством (A). Эта последовательность не может быть неисчислимой в силу предыдущей теоремы. Положим

$$E(\mathscr{E}, \lambda) = \mathscr{E} - (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \cdots).$$

Очевидно

$$E(\mathscr{E}, \lambda) \subset \mathfrak{M}, \quad \varphi[E(\mathscr{E}, \lambda)] > 0.$$

Легко видеть, кроме того, что если $e \subset \mathfrak{M}$, $e \subset E(\mathscr{E}, \lambda)$, $\varphi(e) = 0$, то $\Phi_\lambda(e) = 0$ для любого λ.

В самом деле, в противном случае множество e, обладая свойством (A), либо явилось бы одним из множеств $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$, либо нет. Но в обоих из этих случаев множество e должно иметь общие точки с суммой $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \cdots$, что невозможно.

Допустим теперь, что $\overline{\Phi}_\lambda(\mathscr{E}) = 0$. В этом случае мы также приведем в соответствие функции Φ_λ множество $E(\mathscr{E}, \lambda)$, причем будем считать его пустым.

Расположим теперь все функции, образующие семейство $\mathfrak{N}$ (и этим самым все соответствующие значения параметра λ), в какую-либо вполне упорядоченную последовательность. Затем, переходя от каждого элемента к следующему, путем трансфинитной индукции любому элементу $\Phi_{\lambda_0}(e)$ этой последовательности приведем в соответствие множество $E(\mathscr{E}^*_{\lambda_0}, \lambda_0)$, где $\mathscr{E}^*_{\lambda_0} = \mathfrak{A}$, если λ_0 есть первый элемент; если же λ_0 не есть первый элемент, то положим

$$\mathscr{E}^*_{\lambda_0} = \mathfrak{A} - \sum E(\mathscr{E}^*_\lambda, \lambda),$$

причем знак суммы будет относиться ко всем λ, предшествующим λ_0. Непустые слагаемые этой суммы, которые, очевидно, не имеют попарно общих точек, могут образовывать, в силу теоремы I, самое большее, счетное множество, откуда $\mathscr{E}^*_{\lambda_0} \subset \mathfrak{M}$. Расположив все значения параметра λ, для которых соответствующие множества $E(\mathscr{E}^*_\lambda, \lambda)$ не пусты, в одну счетную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, положим $\mathfrak{A}_i = E(\mathscr{E}^*_{\lambda_i}, \lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как для любого λ

$$\mathfrak{A} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i \subset \mathscr{E}^*_\lambda - E(\mathscr{E}^*_\lambda, \lambda), \quad \overline{\Phi}_\lambda[\mathscr{E}^*_\lambda - E(\mathscr{E}^*_\lambda, \lambda)] = 0,$$

то, тем более, $\overline{\Phi}_\lambda\left(\mathfrak{A} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i\right) = 0$ при любом λ.

Выберем, наконец, постоянные положительные числа $C_1, C_2, \ldots$ так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\Phi}_{\lambda_i}(\mathfrak{A}_i)$ сходился и для каждого $e \subset \mathfrak{M}$ положим

$$M(e) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\Phi}_{\lambda_i}(e\,\mathfrak{A}_i).$$

Определенная таким образом неотрицательная функция множества $M(e)$ будет являться базисом семейства $\mathfrak{N}$.

Действительно, прежде всего, она вполне аддитивна. Это вытекает из ([2]), но можно также легко доказать непосредственно. Пусть теперь $M(e)=0$, где e — определенное множество из $\mathfrak{M}$. Тогда каждое из слагаемых суммы, определяющей $M(e)$, обратится в нуль, и так как $e\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_i$ $(i=1, 2, \ldots)$, то любая из функций семейства $\mathfrak{N}$ обратится в нуль на каждом из множеств $e\mathfrak{A}_i$, а следовательно, также на всем множестве e.

Из предыдущего легко вытекает также следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества, определенных на семействе множеств $\mathfrak{M}$. Для того чтобы семейство $\mathfrak{N}$ обладало базисом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: не существует несчетного множества взаимно не налегающих множеств $e_\alpha, e_\beta, \ldots$, принадлежащих $\mathfrak{M}$, на каждом из которых по меньшей мере одна из функций семейства $\mathfrak{N}$ отлична от нуля.*

Из теоремы 2 и из ([3]) легко вытекает следующая теорема:

Теорема 4. *Свойства равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества эквивалентны.*

Теорема 5. *Если семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\lambda(e)$ обладает свойством равномерной аддитивности, то этим же свойством обладает соответствующее семейство $\overline{\mathfrak{N}}$ полных вариаций $\overline{\Phi}_\lambda(e)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 семейство $\mathfrak{N}$ обладает базисом $M(e)$ и будет равностепенно непрерывным относительно этого базиса ([3]). Функция $M(e)$ будет также базисом для семейства $\overline{\mathfrak{N}}$, причем последнее будет обладать свойством равностепенной непрерывности относительно $M(e)$. Последние два утверждения легко вытекают из ([3]), лемма I, теорема III. Легко видеть теперь, что рассматриваемая теорема, действительно, верна.

В заключение, покажем, что равномерная аддитивность семейства $\mathfrak{N}$ не является необходимым условием существования базиса. Пусть $\mathfrak{M}$ есть семейство измеримых в смысле Лебега множеств отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$. Рассмотрим последовательность точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ этого отрезка, отличных друг от друга, и сходящийся ряд $a_1 + a_2 + \cdots$ с постоянными положительными членами. Определим семейство $\mathfrak{N}$ следующим образом:

$\Phi_i(e)=1$, если $\lambda_i \subset e$, $\Phi_i(e)=0$, если $\lambda_i \not\subset e$, где e — любое множество из семейства $\mathfrak{M}$, $i=1, 2, \ldots$ Положим, далее, $M(e)=\Sigma a_\nu$, где знак суммы относится ко всем ν, для которых $\lambda_\nu \subset e$, e — любое множество из $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что функция $M(e)$ будет являться базисом семейства $\mathfrak{N}$, которое не будет обладать свойством равномерной аддитивности.

Поступило
27 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Radon, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., 128, Abt. IIa, 1083 (1919). [2] В. М. Дубровский, Изв. АН СССР, сер. матем., 9:4, 311 (1945); 11:1, 101 (1947). [3] В. М. Дубровский, Математ. сб., 20 (62), № 2, 317 (1947).