Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. З. ВУЛИХ

КОНКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 V 1947)

1°. Пусть X — линейное полуупорядоченное пространство типа S_5, т. е. удовлетворяющее пяти аксиомам Л. В. Канторовича ([1]). Предположим, что в нем существует единица, т. е. такой элемент 1, что $\inf(x, 1) > 0$ для любого $x > 0$. Обозначим через X_0 множество всех ограниченных элементов $x \in X$, т. е. таких, для которых выполнено условие $|x| \leqslant C \cdot 1$. X_0 также является пространством типа S_5. Кроме того, в X_0 можно определить норму $\|x\|$, полагая ее равной наименьшему из чисел C, удовлетворяющих указанному неравенству. Таким образом, X_0 становится пространством Банаха — типа (B).

Известна следующая теорема (М. Крейн и С. Крейн ([2]), Sh. Kakutani ([3])): пространство X_0 изоморфно и изометрично множеству $C(Q)$ всех вещественных непрерывных функций, заданных на некотором бикомпактном пространстве Хаусдорфа $Q(X_0)$*. Это пространство определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма. Функцию, соответствующую элементу x, мы будем обозначать $x(t)$ $(t \in Q)$.

Однако, если взять произвольное бикомпактное пространство Хаусдорфа Q, то множество $C(Q)$ будет представлять линейное полуупорядоченное пространство типа S_4, т. е. в нем может не выполняться аксиома о существовании точных границ у всякого ограниченного множества. Мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $C(Q)$ было пространством S_5, необходимо и достаточно, чтобы в Q замыкание любого открытого множества было также открытым множеством (условие A).*

Пусть Q удовлетворяет условию A. Введем в рассмотрение обобщенные непрерывные функции на Q, допускающие на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. Множество всех таких функций обозначим $\boldsymbol{C}_\infty(Q)$.

Теорема 2. $\boldsymbol{C}_\infty(Q)$ — *пространство типа S_5 с единицей.*

В доказательстве наиболее существенным пунктом является определение суммы двух функций $x_1(t) + x_2(t)$ в точках, где $x_1(t) = +\infty$, $x_2(t) = -\infty$. Это удается сделать, доказав, что существует единственная функция $x(t) \in \boldsymbol{C}_\infty(Q)$, совпадающая с суммой $x_1(t) + x_2(t)$ всюду, где эта сумма имеет непосредственный смысл.

---

* Под изоморфизмом мы понимаем линейное взаимооднозначное соответствие, сохраняющее упорядочение. Норма в $C(Q)$ определяется обычным способом: $\|x\| = \max\limits_{t \in Q} |x(t)|$.

Приведем определение, принадлежащее А. Г. Пинскеру ([4]): линейное множество X_1 в пространстве X типа S_5 называется его нормальным подпространством, если оно само представляет пространство типа S_5 и если из $x \in X_1$ и $|y| \leqslant |x|$ $(y \in X)$ следует $y \in X_1$ *.

Следующая теорема является обобщением теоремы Крейнов — Kakutani.

Теорема 3. *Всякое пространство X типа S_5 с единицей изоморфно некоторому нормальному подпространству $C_\infty(Q)$, где $Q = Q(X_0)$.*

Для установления изоморфизма достаточно представить каждый $x \in X$, $x > 0$, в виде $x = \sup x_n$, где $x_n = \inf(x, n \cdot 1)$, и положить $x(t) = \sup x_n(t)$. Включение $x(t) \in C_\infty(Q)$ легко проверяется. Для произвольного x полагаем $x(t) = x_+(t) - x_-(t)$.

Напомним еще одно определение А. Г. Пинскера ([4]): пространство Y является расширением пространства X, если X — нормальное подпространство Y и если в Y не существует элемента $y \neq 0$, дизъюнктного со всеми $x \in X$ (т. е. если равенство $\inf(|x|, |y|) = 0$ выполнено при всех $x \in X$, то $y = 0$). Расширение называется максимальным, если оно содержит всякое другое расширение. Из теорем 2—3 легко следует одна теорема А. Г. Пинскера:

Теорема 4. *Для всякого пространства типа S_5 существует максимальное расширение с единицей* ([5]).

Для доказательства нужно представить данное пространство X в виде прямой суммы попарно дизъюнктных подпространств X_ξ с единицей (возможность этого также доказана А. Г. Пинскером ([6])), к каждому из них применить теорему 3, а затем образовать прямую сумму пространств $C_\infty\{Q[(x_\xi)_0]\}$**. Это и есть требуемое максимальное расширение.

2°. Для любой вещественной функции $x(t)$ $(t \in Q)$ можно определить функцию-максимум:

$$x_{\max}(t_0) = \inf_{U(t_0)} \sup_{t \in U(t_0)} x(t),$$

где $U(t_0)$ — произвольная окрестность точки t_0. Известно, что $x_{\max}(t)$ — полунепрерывная сверху функция. Аналогично определяется функция-минимум.

Лемма. *Если бикомпактное пространство Хаусдорфа удовлетворяет условию A (см. теорему 1), то функция-максимум всякой полунепрерывной снизу функции непрерывна.*

Аналогичное утверждение имеет место для функции-минимум полунепрерывной сверху функции. С помощью этой леммы можно установить смысл точных границ и (o)-сходимости в пространстве $C_\infty(Q)$ и его нормальных подпространствах.

Теорема 5. *Пусть $x_\xi \in C_\infty(Q)$ $(\xi \in \Xi)$. Для того чтобы множество $\{x_\xi\}$ было ограничено сверху, необходимо и достаточно, чтобы множество функций $\{x_\xi(t)\}$ было ограничено сверху во всем пространстве Q за исключением, может быть, некоторого нигде не плотного множества. При этом, если $x = \sup x_\xi$, то*

$$x(t) = y_{\max}(t), \quad \text{где } y(t) = \sup_\xi x_\xi(t). \tag{1}$$

* Это определение введено также в работе S. Bochner'a и R. S. Phillips'a ([9]).

** Т. е. множество всевозможных наборов функций, по одной из каждого из этих пространств, с естественным определением линейных операций и упорядочения.

Отметим, что в условии достаточности нигде не плотное множество можно заменить множеством I категории*. Если же $\sup x_\xi = +\infty$, то в Q существует открытое множество, на котором всюду, за исключением множества I категории, $\sup x_\xi = +\infty$.

Для ограниченности множества $\{x_\xi\}$ в каком-нибудь нормальном подпространстве $C_\infty(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $v(t)$ (см. (1)) принадлежала этому подпространству.

Теорема 6. *Пусть* $x_n \in C_\infty(Q)$ $(n=1, 2, \ldots)$. *Для существования конечного* $x=(o)\text{-}\lim x_n$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный* $\lim x_n(t)$ *при всех* t *за исключением множества* I *категории в* Q. *При этом условии функция* $x(t)$ *определяется так:*

$$x(t) = (y_{\max})_{\min}(t) = (y_{\min})_{\max}(t), \tag{2}$$

где

$$y(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(t) \quad \textit{или} \quad y(t) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(t).$$

Теорема 6'. *Для того чтобы* $x_n \xrightarrow{(o)} +\infty$ *в* $C_\infty(Q)$, *необходимо и достаточно, чтобы множество функций* $x_n(t)$ *было ограничено снизу во всем пространстве* Q, *за исключением множества* I *категории, и чтобы в* Q *существовало открытое множество, в котором всюду, за исключением множества* I *категории,* $\lim x_n(t) = +\infty$.

Замечания. 1. Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то $x_n(t) \to x(t)$ всюду, за исключением множества I категории.

2. Если x_n образуют монотонную последовательность и $x_n(t) \to x(t)$ на всюду плотном множестве, причем $x(t) \in C_\infty(Q)$, то $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

3. Если все x_n принадлежат некоторому нормальному подпространству $C_\infty(Q)$, то для существования конечного $(o)\text{-}\lim x_n$ в этом подпространстве необходимо и достаточно условие теоремы 6 и ограниченность множества $\{x_n\}$ в этом подпространстве.

3°. Теоремы 3 и 4 открывают новый путь для введения операции умножения в пространствах S_5 ([7]). Именно, если $x(t)$ и $y(t) \in C_\infty(Q)$, то полагаем $(xy)(t) = x(t)\cdot y(t)$. Это произведение всегда существует. В нормальном подпространстве $C_\infty(Q)$ пользуемся тем же определением, но при этом считаем произведение существующим, если произведение функций принадлежит тому же подпространству. Такое определение произведения эквивалентно дававшемуся мной в ([7]), но доказательство некоторых результатов становится проще.

Обратный элемент определяется следующим образом: пусть $A = \underset{t}{E}(x(t) > 0)$, $B = \underset{t}{E}(x(t) < 0)$. Тогда

$$x^{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(t)} \text{ при } t \in A + B & \left(\dfrac{1}{\infty} = 0\right), \\ +\infty \text{ при } t \in \overline{A} - A, \\ -\infty \text{ при } t \in \overline{B} - B, \\ 0 \text{ при } t \,\overline{\in}\, \overline{A+B}. \end{cases}$$

Легко видеть, что в $C_\infty(Q)$ любой элемент имеет обратный, а в нормальных подпространствах обратный элемент существует в том случае, если указанная функция принадлежит тому же подпространству.

---

* В бикомпактном пространстве Хаусдорфа ни одно открытое множество не может быть I категории.

4°. Из теоремы Stone'а о реализации всякой дистрибутивной алгебры Буля в виде семейства всех одновременно замкнутых и открытых множеств некоторого бикомпактного пространства Хаусдорфа Q ([8]) сразу следует, что каждая дистрибутивная алгебра Буля может служить базой единичных элементов некоторого линейного полуупорядоченного пространства типа S_4. Этим пространством будет $C(Q)$. Из нашей теоремы 1 следует, что если в данной алгебре Буля всякое ограниченное множество имеет точные границы, то получающееся пространство $C(Q)$ будет типа S_5.

Поступило
23 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Матем. сб., 2 (44), 121 (1937). [2] М. Крейн и С. Крейн, Матем. сб., 13, 3 (1943). [3] Sh. Kakutani, Ann. Math., 42, 994 (1941). [4] А. Г. Пинскер, ДАН, 49, 8 (1945). [5] А. Г. Пинскер, ДАН, 21, 6 (1938). [6] А. Г. Пинскер, ДАН, 49, 169 (1945). [7] Б. З. Вулих, ДАН, 26, стр. 847 и 852 (1940). [8] M. H. Stone, Trans. A. M. S., 41, 376 (1937). [9] S. Bochner and R. S. Phillips, Ann. Math., 42, 316 (1941).