Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 2

ФИЗИКА

Я. СМОРОДИНСКИЙ

НОРМИРОВКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙТРОНА

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 17 II 1948)

При вычислении различных процессов, в которых участвует дейтрон, обычно используется приближенная волновая функция дейтрона

$$\psi_d \sim \frac{1}{r} e^{-\alpha r}, \tag{1}$$

введенная Бете и Пейерльсом. При этом для ее нормировки обычно пользуются моделью дейтрона с взаимодействием в виде прямоугольной ямы (([1]), § 12), что представляется крайне непоследовательным, так как основным достоинством теории дейтрона как раз и является ее независимость от конкретного вида потенциала взаимодействия. Эта непоследовательность может быть, однако, легко устранена, если воспользоваться уточненной теорией, предложенной в работах автора ([2], [3]).

Для того чтобы пронормировать волновую функцию дейтрона, необходимо вычислить интеграл

$$\int_0^\infty f^2\, dr, \tag{2}$$

где $f = \psi_d r$.

При вычислении этого интеграла мы сталкиваемся с той трудностью, что благодаря экспоненциальному характеру волновой функции (1) существенную роль в интеграле имеет область вблизи начала координат, а именно в этой области приближенная волновая функция наиболее сильно отличается от точной.

Эта трудность может быть преодолена, если использовать уточненные граничные условия, данные в ([2]), с экспериментально полученными значениями коэффициентов.

Если не накладывать на волновую функцию никаких условий на бесконечности, то волновое уравнение будет иметь решение при любом значении параметра E_0 (который в этом случае уже не будет энергией системы). Продифференцируем это волновое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{M}\frac{d^2 f}{dr^2} + U(r) f = E_0 f \tag{3}$$

по E_0 и умножим результат на E. Получим, считая теперь f функцией координат и энергии:

$$-\frac{\hbar^2}{M} f \frac{\partial}{\partial E_0}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + fU\frac{\partial f}{\partial E} = f^2 + E_0 f\frac{\partial f}{\partial E_0}. \tag{4}$$

Используя само уравнение (3), приведем это выражение к виду:

$$-\frac{\hbar^2}{M}\left(f\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\partial f}{\partial E_0} - \frac{\partial f}{\partial E_0}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) = f^2. \tag{5}$$

Интегрируя от 0 до некоторого (большого) значения R и принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial}{\partial E_0}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\frac{1}{f^2}\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial E_0}-\frac{\partial f}{\partial E_0}\frac{\partial f}{\partial r}\right], \tag{6}$$

получим

$$\int\limits_0^R f^2 dr=-\frac{\hbar^2}{M}\left[f^2\frac{\partial}{\partial E_0}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]. \tag{7}$$

Будем теперь считать, что нормировочный множитель у приближенной функции выбран так, чтобы на больших расстояниях от начала координат эта функция совпадала с точной, и вычислим интеграл (7) сначала с помощью точной функции f, а потом с помощью приближенной f_a.

Если теперь подставить в (7) точную волновую функцию, которая, очевидно, обращается в нуль в начале координат, то правая часть (7) также обращается на нижнем пределе в нуль. Если же пользоваться приближенной волновой функцией, то в силу уточненного граничного условия, которое мы запишем, меняя обозначения, принятые в ([2]), в виде:

$$\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0=\frac{\sqrt{Mc^2}}{\hbar c}(A_1+2B_1E_0), \tag{8}$$

где E_0—энергия в системе центра инерции, получим:

$$\frac{\partial}{\partial E_0}\left(\frac{1}{f_a}\frac{\partial f_a}{\partial r}\right)=2B_1. \tag{9}$$

На верхнем пределе значение правой части (7) одно и то же как для точной, так и для приближенной функции, т. е. обе функции на больших расстояниях от начала координат совпадают. Поэтому мы можем написать:

$$\int\limits_0^\infty f^2\,dr-\int\limits_0^\infty f_a^2\,dr=-2B\frac{\sqrt{M}}{\hbar}, \tag{10}$$

пользуясь выражением для приближенной волновой функции (1):

$$\int\limits_0^\infty f^2 dr=\frac{1}{2\alpha}[1-4\varepsilon^{1/2}B_1]. \tag{11}$$

Постоянные A_1 и B_1 в граничном условии были определены из экспериментальных данных ([3]).

Если энергии измеряются в MeV, то $A=1{,}22$ и $B=0{,}06$. Пользуясь еще значением $\varepsilon=2{,}18$, получим

$$\int\limits_0^\infty f^2 dr=\frac{1}{1{,}23\sqrt{2\alpha}}. \tag{12}$$

Поэтому нормированная волновая функция дейтрона имеет вид:

$$f=1{,}23\sqrt{2\alpha}\,e^{-\alpha r}\approx\sqrt{3\alpha}\,e^{-\alpha r}. \tag{13}$$

Автор выражает свою благодарность акад. Л. Д. Ландау за интерес к работе.

Поступило
10 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Бете и Р. Ф. Бечер, Физика ядра, ч. 1, Харьков, 1938. [2] Я. Смородинский, ЖЭТФ, **15**, 89 (1945). [3] Я. Смородинский, ЖЭТФ, **17**, 941 (1947).