

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Академик В. П. НИКИТИН, В. К. ТУРКИН и Н. П. КУНИЦКИЙ

**ДИАГРАММЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА**

В настоящей статье мы рассматриваем вопрос о построении диаграмм устойчивости для систем, работа которых описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d\omega_i}{dt} = f_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Рассматриваемую нами систему естественно называть системой  $n$ -го порядка. В уравнениях (1)  $t$  — независимое переменное (время), а  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  — некоторые переменные величины (функции времени), значения которых могут меняться в процессе работы системы. В случае, когда рассматриваемая система относится к области электротехники, это могут быть токи, напряжения, магнитные потоки и т. д. в различных составных частях системы.

Пусть

$$\omega_i = \omega_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

есть некоторое стационарное (или установившееся) состояние рассматриваемой нами системы. Величины

$$\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_n^* \quad (3)$$

должны быть, как известно, действительными корнями системы уравнений

$$f_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Если же для системы (4) нельзя подобрать действительных значений корней (3), то рассматриваемая нами система не имеет стационарных состояний.

Проведение анализа переходного процесса становится более наглядным, если пользоваться при этом диаграммами устойчивости, иллюстрирующими характер этого процесса. Методы построения подобного рода диаграмм были изложены в докладе, прочитанном нами 15 декабря 1944 г. на Совещании по автоматизированному электроприводу, созванном Институтом автоматики и телемеханики АН СССР. Часть полученных нами результатов, изложенных в упомянутом докладе, опубликована в наших статьях (1, 2). Во второй из этих статей описаны диаграммы, построенные нами для случая  $n=4$  (случай  $n < 4$  не представляет интереса ввиду своей полной элементарности). В настоящей статье мы излагаем применение того же метода к случаю  $n=5$ .

Пусть разложение правых частей равенств (1) в ряд по степеням  $\omega_i - \omega_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) имеет вид

$$f_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} (\omega_i - \omega_i^*) + F_k, \quad (5)$$

где  $F_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — совокупность членов степени выше первой относительно величин  $\omega_i - \omega_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) в соответствующем разложении (членов нулевой степени эти разложения иметь не могут). Обозначим через

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (6)$$

корни алгебраического уравнения  $n$ -й степени

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

где коэффициенты  $\alpha_{ki}$  взяты из равенств (5) (мы будем считать, что все корни этого уравнения различные). Как известно, стационарное состояние (2) устойчиво, если все числа (6) имеют отрицательные действительные части, и неустойчиво, если хотя бы одно из этих чисел имеет положительную действительную часть.

Пусть действительные части всех величин (6) отрицательны, так что стационарное состояние (2) устойчиво. Пусть  $\rho$  есть абсолютная величина наименьшей по абсолютной величине из действительных частей величин (6). Пусть

$$x_{\lambda_j} = -\rho + \sigma_j i, \quad \bar{x}_{\lambda_j} = -\rho - \sigma_j i \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

те из величин (6), действительные части которых равны  $-\rho$ . Тогда при сравнительно небольших отклонениях от стационарного состояния (2) для переходного процесса имеют место формулы:

$$\omega_k = \omega_k^* + e^{-\rho t} \left[ \sum_{j=1}^m c_{kj} \sin(\sigma_j t + \tau_{kj}) + \mu_k(t) \right] \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где  $c_{kj}$  и  $\tau_{kj}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, m$ ) — некоторые постоянные, а  $\mu_k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — некоторые функции времени, удовлетворяющие условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_k(t) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, при достаточно больших значениях  $t$  для описания переходного процесса можно пользоваться следующими приближенными равенствами:

$$\omega_k \cong \omega_k^* + e^{-\rho t} \sum_{j=1}^m c_{kj} \sin(\sigma_j t + \tau_{kj}) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Из равенства (8) вытекает, что величину  $\rho$  естественно назвать коэффициентом затухания переходного процесса. Знание этой величины позволяет выяснить, с какой быстротой рассматриваемая система, будучи выведенной из стационарного состояния (2), снова возвращается в это состояние.

Уравнение (7) может быть записано в виде

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (9)$$

При построении диаграмм устойчивости требуется пояснить графически зависимость коэффициента затухания  $\rho$  от коэффициентов уравнения (9). Трудность заключается здесь в том, что при  $n > 4$  приходится иметь дело с функцией от более или менее значительного числа независимых переменных.

Как уже было выше сказано, в настоящей работе мы рассматриваем случай  $n=5$ , т. е. имеем дело с уравнением (с действительными коэффициентами)

$$s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0. \quad (10)$$

Посредством преобразования  $s = u - \frac{a_1}{5}$  уравнение (10) приводится к виду

$$u^5 + b_2 u^3 + b_3 u^2 + b_4 u + b_5 = 0. \quad (11)$$

Прделаем в уравнении (11) замену  $u = \sqrt{b_2} v$ , предполагая при этом, что  $b_2 > 0$ ; значение корня берем арифметическое. Для величины  $v$  мы получим алгебраическое уравнение вида

$$v^5 + v^3 + xv^2 + yv + z = 0. \quad (12)$$

Пусть  $q$  — какое-нибудь положительное число. Положим  $v = w + q$ ; тогда уравнение (12) примет вид

$$\begin{aligned} w^5 + 5qw^4 + (10q^2 + 1)w^3 + (10q^3 + 3q + x)w^2 + \\ + (5q^4 + 3q^2 + 2qx + y)w + q^5 + q^3 + q^2x + qy + z = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для того чтобы действительные части всех корней уравнения (13) были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись известные условия Гурвица. Для уравнения (13) условия имеют следующий вид:

- 1)  $5q > 0$ ;
- 2)  $40q^3 + 2q - x > 0$ ;
- 3)  $280q^6 + 70q^4 + 6q^2 - 15q^3x - qx - x^2 - 20q^2y + 5qz > 0$ ;
- 4)  $1024q^{10} + 768q^8 + 192q^6 + 16q^4 + 128q^7x + 64q^5x + 8q^3x - 16q^4x^2 - 4q^2x^2 - 2qx^3 - 192q^6y - 32q^4y + 4q^2y - 32q^3xy - x^2y - 352q^5z - 32q^3z - 2qz + 28q^2xz + xz - 16q^2y^2 + 8qyz - z^2 > 0$ ;
- 5)  $q^5 + q^3 + q^2x + qy + z > 0$ .

Первое из этих условий не представляет интереса, поскольку, по нашим предположениям,  $q > 0$ . Остальные четыре неравенства дают нам границы той области значений коэффициентов  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , в которой все корни этого уравнения удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} w < 0 \quad (14)$$

и, следовательно, все корни уравнения (11) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} s < p, \quad (15)$$

где

$$p = -\frac{a_1}{5} + q \sqrt{b_2}.$$

При построении диаграммы мы примем  $y$  и  $z$  за прямоугольные декартовы координаты на плоскости. В этой плоскости область выполнения условия (14) (а следовательно, и условия (15)) будет ограничена линиями, уравнения которых имеют вид:

- (a)  $280q^6 + 70q^4 + 6q^2 - 15q^3x - qx - x^2 - 20q^2y + 5qz = 0$ ;
- (b)  $1024q^{10} + 768q^8 + 192q^6 + 16q^4 + 128q^7x + 64q^5x + 8q^3x - 16q^4x^2 - 4q^2x^2 - 2qx^3 - 192q^6y - 32q^4y + 4q^2y - 32q^3xy - x^2y - 352q^5z - 32q^3z - 2qz + 28q^2xz + xz - 16q^2y^2 + 8qyz - z^2 = 0$ ;
- (c)  $q^5 + q^3 + q^2x + qy + z = 0$ .

Диаграмма получается путем нанесения на координатную плоскость границ областей (как уже сказано, границы эти образованы линиями (a), (b), (c)) для различных значений коэффициентов  $q$  и  $x$ . Значения  $q$  должны браться положительные, а значения  $x$  (при выбранном  $q$ ) такие, чтобы удовлетворялось условие  $40q^3 + 2q - x > 0$ .

Отметим, что линии (a) и (c) являются прямыми и построение их не представляет никаких трудностей. Линии (b) — параболы, построение которых при заданных  $q$  и  $x$  также достаточно просто. В случае  $b_2 < 0$  построение диаграммы производится аналогичным методом.

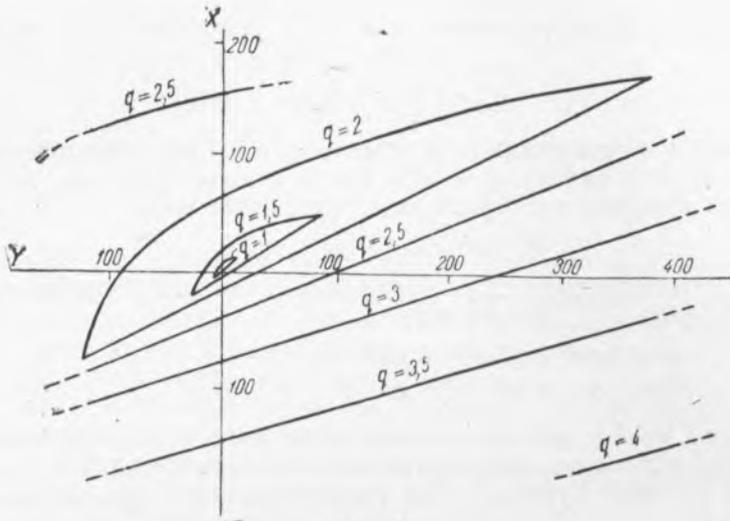


Рис. 1

Построение диаграммы существенно упрощается в случае  $b_2 = 0$ ; в этом случае уравнение приводится к виду

$$v^5 + v^2 + yv + z = 0.$$

Произведя исследование, аналогичное вышеприведенному, мы получим, что граница области выполнения условия (14) состоит в этом случае из линий

(a)  $280q^6 - 15q^3 - 1 - 20q^2y + 5qz = 0$ ;

(b)  $1024q^{10} + 128q^7 - 16q^4 - 2q - 192q^8y - 32q^3y - y - 352q^5z + 28q^2z - 16q^2y^2 + 8qyz - z^2 = 0$ ;

(c)  $q^5 + q^2 + qy + z = 0$ .

Таким образом, в случае  $b_2 = 0$  коэффициенты уравнений граничных линий содержат лишь один буквенный параметр (вместо двух), что, разумеется, весьма упрощает построение диаграммы.

Еще более простым является случай, когда можно считать, что  $b_2 = b_3 = 0$ . В этом случае уравнение (11) мы запишем в виде  $u^5 + xu + y = 0$ . Границы областей, на которые разбивается в этом случае диаграмма устойчивости, состоят из линий

(a)  $56q^5 - 4qx + y = 0$ ;

(b)  $1024q^{10} - 192q^8x - 352q^5y - 16q^2x^2 + 8qxy - y^2 = 0$ ;

(c)  $q^5 + qx + y = 0$ .

Диаграмма устойчивости для этого последнего случая изображена на рис. 1.

Поступило  
1 VIII 1947

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, *Электричество*, № 4, 23 (1946). <sup>2</sup> Они же *Изв. АН СССР, ОТН*, №1, 1567 (1946).