Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. БРЕХОВСКИХ

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ, УПОТРЕБЛЯЕМЫХ В АКУСТИКЕ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 12 V 1947)

Ниже рассматриваются три вопроса, имеющие важное значение в акустике вообще, особенно в архитектурной акустике.

1. Звуковое поле в помещении обычно представляется как результат суперпозиции прямой сферической волны с бесконечным числом волн, отраженных от границ помещения. При этом отраженные волны считаются также сферическими, а их интенсивность определяется коэффициентом отражения (для плоской волны) в соответственной степени (1). Этот подход к задаче эквивалентен геометрической акустике и называется часто картиной мнимых источников. Таким путем получено большинство формул архитектурной акустики (2—4), с успехом применяемых на практике*. Картина мнимых источников дает точное решение для абсолютно отражающих поверхностей; во всех же практических случаях можно говорить только о приближенной ее применимости. Морзе и Болт (6) указывают на то, что в общем случае эта картина вообще неверна. Ниже мы найдем критерии применимости картины мнимых источников**.

2. Часто встречаются случаи, когда разные участки отражающей поверхности имеют разные свойства (например, стена, частично покрытая звукопоглощающим материалом). В этих случаях отражение также подсчитывается по законам геометрической акустики. Однако при достаточно малых размерах участка этот подход не будет справедлив. В частности, малость длины волны по сравнению с размерами участка оказывается далеко недостаточной. Поэтому возникает вопрос о минимальных размерах участков, при которых можно пользоваться геометрической акустикой.

3. В акустике для характеристики материала широко распространено понятие импеданца (6). Особенно важным является случай, когда импенданц не зависит от угла падения (нормальный импеданц). При этом граничное условие на поверхности формулируется так: отношение нормальной составляющей скорости к звуковому давлению на границе равно постоянной величине, характерной для данной границы раздела. Однако ясно, что этот подход — приближенный, поскольку в точной теории фигурируют не одно, а два граничных условия.

---

* Такой же прием употреблялся при расчете распространения радиоволн между земной поверхностью и ионосферой (5).

** Часто в картине мнимых источников делают дальнейшее упрощение, считая коэффициент отражения не зависящим от угла (1). Однако мы этого предположения делать не будем.

Возникает вопрос о границах применимости понятия нормального импеданца.

Предположим, что в свободном пространстве имеется абсолютно отражающий участок AB конечных размеров, плоскость которого примем за плоскость $z=0$ (рис. 1). В точке Q находится излучатель. Вычислим поле отраженной волны в точке P. P и Q будем предполагать расположенными не слишком близко к плоскости $z=0$, по крайней мере не ближе, чем на расстоянии длины волны. Посмотрим, при каких минимальных размерах участка AB отраженная волна будет даваться тем же выражением e^{ikR_1}/R_1, как и для бесконечной отражающей границы. Здесь $R_1=QO+OP$. Воспользовавшись теоремой Грина, отраженную волну можно представить в виде интеграла по плоскости $z=0$. Значение звукового потенциала и его производных на этой плоскости возьмем в приближении геометрической акустики, а именно, будем считать, что в каждой точке C участка AB имеется падающая волна e^{ikR_c}/R_c и равная ей отраженная волна, а вне этого участка — только падающая волна (кирхгофовское приближение).

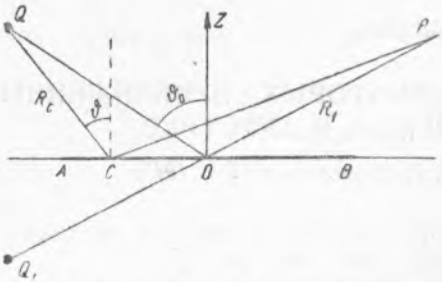

Рис. 1

Интеграл по всей плоскости $z=0$, содержащий падающую волну, для точки P дает нуль, как и для случая отсутствия отражающей границы. Остается только интеграл от отраженной волны по участку AB. Отсюда видно, что эта задача полностью эквивалентна дифракционной задаче о нахождении поля в точке P, обусловленного источником Q_1 (зеркальное отражение Q в плоскости $z=0$) при наличии отверстия AB в непрозрачном экране. Ее решение [7] показывает, что искомые минимальные размеры области AB соответствуют эллипсу с центром в точке O и полуосями $a\sqrt{R_1\lambda}/\cos\vartheta_0$ и $a\sqrt{R_1\lambda}$, причем луч QO проектируется на большую полуось. Величина a должна быть тем больше, чем более близкое совпадение требуется между точным решением и результатами геометрической акустики. При отклонении в 10% $a\cong 1$. Если участок AB не абсолютно отражающий или представляет собой только часть отражающей границы с другими свойствами, то результат остается тем же, но несколько меняется величина a. Однако при указанной точности во всех практических случаях она не превышает нескольких единиц.

Перейдем теперь к первому вопросу и рассмотрим вначале отражение от бесконечной граничной плоскости. При этом можно ограничиться отражением только от некоторой „эффективной“ области AB, размеры которой были только что определены. Для применения в теореме Грина выпишем выражение для отраженной волны в произвольной точке C границы: $e^{ikR_c}B(\vartheta)/R_c$, где

$$B(\vartheta)=\frac{m\cos\vartheta-\sqrt{n^2-\sin^2\vartheta}}{m\cos\vartheta+\sqrt{n^2-\sin^2\vartheta}} \tag{1}$$

— коэффициент отражения. Здесь $m=\rho_1/\rho$ — отношение плотностей соприкасающихся сред, $n=c/c_1$ — показатель преломления (m и n могут быть комплексными, индекс 1 относится к нижней среде). Когда B не зависит от ϑ (например при $n=1$), амплитуда волны при прохождении плоскости AB в соответствующей дифракционной задаче умножается на постоянную величину B. Взяв отверстие достаточно большим, мы получим волну $e^{ikR_1}B/R_1$. Таким образом, геометрическая акустика (картина мнимых источников) строго справедлива, если коэффициент отражения не зависит от угла падения. Случай абсолютно отражающей границы ($B=1$) сюда входит в качестве частного случая.

Для произвольного $B(\vartheta)$ воспользуемся разложением

$$B(\vartheta)=B(\vartheta_0+\Delta\vartheta)=B(\vartheta_0)+B'(\vartheta_0)\Delta\vartheta+\frac{1}{2}B''(\vartheta_0)(\Delta\vartheta^2)+\ldots \tag{2}$$

При интегрировании по участку AB интеграл от первого члена даст $e^{ikR_1}B(\vartheta_0)/R_1$, так как это соответствует не зависящему от угла падения коэффициенту отражения. Второй член даст нуль, ибо входят как положительные, так и отрицательные $\Delta\vartheta$. Интеграл от третьего члена даст поправку к картине мнимых источников и легко оценивается, если учесть, что максимальное $\Delta\vartheta$ в пределах эффективной зоны равно $(kR_1)^{-1/2}$. Для него получаем $e^{ikR_1}B''(\vartheta_0)/R_1$. Его малость по сравнению с суммой прямой и отраженной волн дает условие справедливости картины мнимых источников, которое записывается в виде

$$k(z+z_0)\gg w, \tag{3}$$

где z_0 и z — возвышения источника и приемника над границей раздела, а $w=|\rho_1 c_1/\rho c|$. При больших w ($w\cos\vartheta_0 \gg 1$) можно пользоваться более слабым условием:

$$k(z+z_0)\gg 1/w\cos^2\vartheta_0. \tag{4}$$

Для нескольких отражающих границ (например в помещении) будем иметь аналогичные условия, где роль $z+z_0$ будет играть наименьший размер помещения. Можно видеть, что если последний велик по сравнению с длиной волны (а иногда даже и сравним с нею), то пользование геометрической акустикой допустимо.

Переходим к третьему вопросу, причем для простоты рассмотрим случай двух измерений. При точной постановке задачи для звукового потенциала имеем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+k_1^2\varphi_1=0 \tag{5}$$

для нижней среды ($z<0$) и аналогичное уравнение для верхней среды ($z>0$), а кроме того, два граничных условия $z=0$:

$$\partial\varphi/\partial z=\partial\varphi_1/\partial z, \qquad \rho\varphi=\rho_1\varphi_1. \tag{6}$$

Предположив, что в нижней среде распространение происходит в основном вдоль оси z, т. е. производные по x настолько малы, что ими можно пренебречь*, получаем из (5):

$$\varphi_1=\mathrm{const}\cdot e^{k_1 z}.$$

Использовав это в (6), мы и получаем одно условие

$$p/v_z=W, \tag{7}$$

* Эти соображения по существу представляют собой перенесение в акустику соображений Гринберга [9] относительно электромагнитных волн.

где $W=\rho_1\omega/k_1$ — нормальный импеданц. Возьмем сначала плоскую падающую волну $\varphi=\varphi_0 \exp[-i\omega t+i(k_x x+k_z z)]$. Преломленная волна будет содержать фактор $\exp[i(k_x x+k_{1z}z)]$. Вторыми производными по x можно пренебречь, если выполняется условие

$$k_x^2 \ll |k_1|^2. \tag{8}$$

Несколько усилив условие (8), запишем его в виде (учтя, что $k_x^2+k_z^2=k^2$)

$$k^2 \ll |k_1|^2. \tag{9}$$

В таком виде оно оказывается применимым для любого типа волн (исключая случай, когда существенная часть энергии от источника к приемнику переносится „боковой“ волной ([8])). Условие (9) может выполняться или за счет большой мнимой части k_1 (большое поглощение на длине волны) или за счет большой вещественной части. В последнем случае для применимости нормального импеданца необходимо, чтобы квадрат скорости звука в нижней среде был значительно меньше квадрата скорости звука в верхней среде. Некоторые авторы делали ошибку, применяя нормальный импеданц для морского дна в гидроакустике. В этом случае k^2 и k_1^2 одного порядка, вследствие чего ни (8), ни (9) не выполняются.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
12 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Розенберг, ЖТФ, 12, 220 (1942). [2] A. Jager, Akad. Wiss. Wien, 2a, 120, 613 (1911). [3] C. Eyring, J. A. S. A., 2, 217 (1930). [4] G. Millington, ibid., 4, 69 (1932). [5] В. Гуляев, ЖТФ, 9, 1697 (1939). [6] P. Morse and R. Bolt, Rev. Mod. Phys., 16, No. 2 (1944) (см. в частности § 53). [7] М. Борн, Оптика, 1937, § 55. [8] Л. Бреховских, Изв. АН СССР, сер. физ., 10, 491 (1946); диссертация ФИАН. [9] G. Grünberg, J. of Phys., 6, 135 (1942).