Доклады Академии Наук СССР
1948. Том, LX, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА

(Представлено академиком Б. А. Введенским 24 II 1948)

1. Введем систему параболических координат, связанных с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями:

$$x=2\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \qquad y=2\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \qquad z=-\xi+\eta, \tag{1}$$

где φ — угол между плоскостью, проходящей через ось z и некоторую произвольную точку с текущими координатами, и заданной фиксированной плоскостью, например, плоскостью xOz; ξ и η — параболические координаты.

Координатные поверхности $\xi=\text{const}$ и $\eta=\text{const}$ представляют собой систему взаимно ортогональных параболоидов вращения вокруг оси z. Система этих параболоидов конфокальна, имеет начало координат в фокусе и фокальные расстояния ξ и η соответственно. В этой системе координат уравнение параболоида имеет вид $\eta=\eta_0$. Области наружной по отношению к данному параболоиду соответствуют значения $\eta>\eta_0$, а внутренней $\eta<\eta_0$. Переменная ξ меняется в пределах $0\leqslant\xi<\infty$.

В принятой системе координат волновое уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\frac{\xi+\eta}{4\xi\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+k^2(\xi+\eta)\psi=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) допускает разделение переменных и с помощью замены переменных приводится к уравнениям Лагерра

$$\xi\frac{d^2J_\nu^\mu}{d\xi^2}+(\mu+1-\xi)\frac{dJ_\nu^\mu}{d\xi}+\nu J_\nu^\mu=0. \tag{3}$$

Так как уравнению типа (3) удовлетворяют функции Лагерра первого и второго рода L_ν^μ и U_ν^μ, решение уравнения (2) имеет вид:

$$\psi=\{AS_\nu^\mu(\pm 2ik\xi)+BV_\nu^\mu(\pm 2ik\xi)\}\times$$
$$\times\{CS_\nu^\mu(\mp 2ik\eta)+DV_\nu^\mu(\mp 2ik\eta)\}\{Ee^{i\mu\varphi}+Fe^{-i\mu\varphi}\}e^{i\omega t}, \tag{4}$$

где

$$S_\nu^\mu=z^{\mu/2}e^{-z/2}L_\nu^\mu, \qquad V_\nu^\mu=z^{\mu/2}e^{-z/2}U_\nu^\mu. \tag{5}$$

По условиям задачи координата ξ меняется от 0 до ∞, а η от 0 до η_0. Поэтому в качестве функций S_ν^μ, V_ν^μ мы должны выбрать такие, которые остаются конечными в нуле.

В случае дифракции плоской волны от параболоида падающая волна, если она падает со стороны внутренней области параболоида, характеризуется произведением:

$$S_\nu^\mu(-2ik\xi)\, S_\nu^\mu(+2ik\eta), \tag{6}$$

а отраженная волна произведением

$$S_\nu^\mu(2ik\xi)\, V_\nu^\mu(-2ik\eta). \tag{7}$$

Раскладывая падающую скалярную плоскую волну

$$\theta = e^{ik(x\sin\alpha + z\cos\alpha)}$$

по функциям вида (6), получим

$$\theta = e^{i(\eta-\xi)\cos\alpha + 2i\sqrt{\xi\eta}\sin\alpha\cos\varphi} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} \{S_\nu^\mu(-2ik\xi)\, S_\nu^\mu(2ik\eta)\, A(\nu,0) +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{\infty} i^s S_\nu^\mu(-2ik\xi) S_\nu^\mu(2ik\eta)\cos\varphi\, A(\nu,s)\} \, \frac{\nu!\,\Gamma(\mu+1)}{(2ik)^\mu\,\Gamma(\mu+\nu+1)^2}, \tag{8}$$

где

$$A(\nu,s) = \frac{i^\nu 2^{s+\nu}(s+\nu+2\mu)\,\Gamma(s+\nu+\mu)}{\mu!\, e^{-i\sin\alpha}} J_{s+\nu+2\mu}(\sin\alpha). \tag{9}$$

2. Перейдем от скалярного волнового уравнения к уравнениям Максвелла. При этом будем различать проекции вектора на данное координатное направление и ковариантные составляющие вектора.

Выражения для ковариантных составляющих поля в параболических координатах будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
E_\xi &= \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial z} + k^2\Psi - \frac{ik}{\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\\
E_\eta &= \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial z} - k^2\Psi - \frac{ik}{\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\\
E_\varphi &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial z} + ik\frac{\xi\eta}{\eta+\xi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right),\\
H_\xi &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - k^2\Phi - \frac{ik}{\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\\
H_\eta &= -\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + k^2\Phi - \frac{ik}{\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\\
H_\varphi &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + ik\frac{\xi\eta}{\xi+\eta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь Φ и Ψ — вспомогательные скалярные функции, которые могут быть названы потенциалами.

Учитывая зависимость поля и потенциалов от угла φ, разложение для потенциалов полного поля можем написать в виде:

$$\Phi = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi^{(s)}(\xi, \eta) \sin \varphi s, \tag{11}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \Psi^{(0)}(\xi, \eta) + \sum_{s=1}^{\infty} \Psi^{(s)}(\xi, \eta) \cos \varphi s, \tag{12}$$

где

$$\Phi^{(s)}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(-2ik\xi) S_\nu^\mu(+2ik\eta) M_s^n(\mu, \nu) + \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(2ik\xi) V_\nu^\mu(-2ik\eta) M_s^0(\mu, \nu); \tag{13}$$

$$\Psi^{(s)}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(-2ik\xi) S_\nu^\mu(+2ik\eta) K_s^n(\mu, \nu) + \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(2ik\xi) V_\nu^\mu(-2ik\eta) K_s^0(\mu, \nu). \tag{14}$$

В этих формулах коэффициенты $M_s^n(\mu, \nu)$ и $K_s^n(\mu, \nu)$ соответствуют известной падающей волне и определяются выражениями:

$$M_s^n(\mu, \nu) = 0, \tag{15}$$

$$K_s^n(\mu, \nu) = \frac{E_0}{k^2 \sin \alpha} \frac{\nu!\, \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)^2 (2ik)^\mu}. \tag{16}$$

Величины $M_s^0(\mu, \nu)$ и $K_s^0(\mu, \nu)$ соответствуют отраженной волне и должны быть определены из условий на поверхности параболоида.

Разложения ковариантных составляющих в ряд Фурье имеют вид:

$$E_\xi = \frac{1}{2} E_\xi^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} E_\xi^{(s)} \cos \varphi s, \\ E_\eta = \frac{1}{2} E_\eta^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} E_\eta^{(s)} \cos \varphi s, \quad E_\varphi = -\sum_{s=1}^{\infty} E_\varphi^{(s)} \sin \varphi s. \tag{17}$$

При этом коэффициенты Фурье электрического поля определяются выражениями:

$$E_\xi^{(s)} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial z} + k^2 \Psi^{(s)} - \frac{ik}{\xi} s \Phi^{(s)}, \tag{18}$$

$$E_\eta^{(s)} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial z} - k^2 \Psi^{(s)} - \frac{ik}{\eta} s \Phi^{(s)}, \quad E_\varphi^{(s)} = s \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial z} - ik\rho \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \rho}.$$

Для отраженной волны:

$$\Phi^{(s)}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(2ik\xi) V_\nu^\mu(-2ik\eta) M_s^0(\mu, \nu), \tag{19}$$

$$\Psi^{(s)}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_\nu^\mu(2ik\xi) V_\nu^\mu(-2ik\eta) K_s^0(\mu, \nu), \tag{20}$$

$$\xi E_{\xi}^{(s)} = ik \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} \left[(\nu+1) S_{\nu+1}^{\mu}(2ik\xi) - \left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) S_{\nu}^{\mu}(2ik\xi)\right] \times$$

$$\times V_{\nu}^{\mu}(-2ik\eta) K_{s}^{0}(\mu, \nu) -$$

$$- ik \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_{\nu}^{\mu}(2ik\xi) V_{\nu}^{\mu}(-2ik\eta) M_{s}^{0}(\mu, \nu) s, \tag{21}$$

$$\eta E_{\eta}^{(s)} = ik \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} \left[(\nu+1) V_{\nu+1}^{\mu}(-2ik\eta) - \left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) V_{\nu}^{\mu}(-2ik\eta)\right] \times$$

$$\times S_{\nu}^{\mu}(2ik\xi) K_{s}^{0}(\mu, \nu) - ik \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_{\nu}^{\mu}(2ik\xi) V_{\nu}^{\mu}(-2ik\eta) M_{s}^{0}(\mu, \nu) s, \tag{22}$$

$$E_{\varphi}^{(s)} = - ik \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} \left[(\nu+1) V_{\nu+1}^{\mu}(-2ik\eta) - \left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) V_{\nu}^{\mu}(-2ik\eta)\right] \times$$

$$\times S_{\nu}^{\mu}(2ik\xi) M_{s}^{0}(\mu, \nu) + ik \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\infty} S_{\nu}^{\mu}(2ik\xi) V_{\nu}^{\mu}(-2ik\eta) K_{s}^{0}(\mu, \nu) s. \tag{23}$$

Коэффициенты $M_s^0(\mu, \nu)$ и $K_s^0(\mu, \nu)$ в этих выражениях, определенные из условий на поверхности параболоида ($E_\eta = 0$, $E_\varphi = 0$), соответственно равны:

$$M_s^0(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \{ d [K_s^n(\mu, \nu) + M_s^n(\mu, \nu)] - c [K_s^n(\mu, \nu) - M_s^n(\mu, \nu)] \}, \tag{24}$$

$$K_s^0(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \{ c [K_s^n(\mu, \nu) - M_s^n(\mu, \nu)] - d [K_s^n(\mu, \nu) + M_s^n(\mu, \nu)] \}, \tag{25}$$

где

$$c = \frac{\left[\left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) S_{\nu}^{\mu} - (\nu+1) S_{\nu+1}^{\mu} - S_{\nu}^{\mu} s\right]}{\left[(\nu+1) V_{\nu+1}^{\mu} - \left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) V_{\nu}^{\mu} + V_{\nu}^{\mu} s\right]}, \tag{26}$$

$$d = \frac{\left[\left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) S_{\nu}^{\mu} + S_{\nu}^{\mu} s - (\nu+1) S_{\nu+1}^{\mu}\right]}{\left[(\nu+1) V_{\nu+1}^{\mu} - \left(\frac{\mu}{2}+\nu+1\right) V_{\nu}^{\mu} - V_{\nu}^{\mu} s\right]}. \tag{27}$$

Выражениями (24) — (27) ковариантные составляющие компонент электрического поля и сами проекции физического вектора полностью определяются.

Подобным способом могут быть найдены ковариантные составляющие и проекции физического вектора для любой поляризации плоской волны.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить акад. Б. А. Введенского за внимание и ценные советы при выполнении этой работы, а также члена-корреспондента АН СССР А. Н. Тихонова за просмотр рукописи и ценные указания по направлению дальнейших исследований в этой области.

Институт автоматики и телемеханики
Академии Наук СССР

Поступило
17 II 1948