Доклады Академии Наук СССР
1948. Том, LX, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ СРЕДНИХ СТЕПЕННЫХ, РАВНОМЕРНЫХ (ЧЕБЫШЕВСКИХ) И КВАЗИРАВНОМЕРНЫХ *

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 II 1948)

1°. Общие условия и обозначения. Пусть E обозначает заданное измеримое точечное множество меры μE $(0<\mu E<\infty)$ в каком-нибудь абстрактном пространстве (в смысле Фреше ([8], [9])), в котором для некоторой аддитивной системы множеств $\{e\}$ определена вполне аддитивная неотрицательная мера μe. Различные элементы (точки) множества E будем обозначать буквой x. Пусть, далее,

$$v_0(x),\ v_1(x), \ldots,\ v_n(x) \tag{1}$$

будут $n+1$ заданных числовых функций**, определенных и измеримых (μ) на множестве E, ограниченных или неограниченных, но везде конечных. Мы, наконец, предположим эти $n+1$ функций метрически линейно независимыми в следующем смысле: подмножество $E_1 \subseteq E$ тех точек, в которых обращается в нуль какой-нибудь обобщенный полином $\Omega(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} c_i v_i(x)\left(\sum\limits_{i=0}^{n}|c_i|>0\right)$, всегда удовлетворяет условию

$$\mu E_1 < \mu E. \tag{2}$$

2°. Две леммы о функциях метрически линейно независимых.

Лемма 1. *В условии метрической линейной независимости неравенство* (2) *всегда может быть заменено неравенством вида*

$$\mu E_1 \leqslant g < \mu E, \tag{3}$$

* В некоторых предыдущих работах автора ([1], [2]) был предложен метод последовательных квадратических приближений для фактического построения обобщенных полиномов наименьшего среднего степенного уклонения от нуля. Этот метод, сходящийся при весьма общих условиях, отвечающих природе самой задачи среднего степенного приближения, естественно выдвигал вопрос о дальнейших приложениях к задачам чебышевского типа, связь которых с задачами среднего степенного приближения была, однако, установлена лишь для случаев непрерывных полиномов ([3–7]). Настоящее сообщение трактует соотношения этой связи с такой степенью общности, какая соответствует общности самой задачи среднего степенного приближения и упомянутого метода, причем, естественно (ср. ([6])), здесь приходится удовлетвориться установлением самой сходимости процесса Полиа — Джексона, не входя в рассмотрение быстроты сходимости.

** Они могут быть действительными или комплексными, как и вводимые ниже коэффициенты c_i. В последнем случае условие измеримости $v_i(x)$ сводится к измеримости действительной и мнимой частей в отдельности.

где постоянная g не зависит от выбора коэффициентов c_i полинома Ω.

Доказательство. Введем для дальнейшего обозначение

$$\max\{|c_0|;\ |c_1|, \ldots, |c_n|\} = L[\Omega] = L(c_0,\ c_1, \ldots, c_n). \qquad (4)$$

Доказывая лемму от противного, допустим, что требуемого числа g не существует. Тогда для всякого натурального числа ν нашелся бы полином $\Omega_\nu(x) = \sum_{i=0}^{n} c_{i\nu} v_i(x)$, $L[\Omega_\nu] = 1$, обращающийся в нуль на множестве E_ν, $\mu E_\nu > \mu E - 1/\nu$. Выделяя подпоследовательность индексов ν_m под условием одновременного существования $\lim\limits_{m\to\infty} c_{i\nu_m} = c_{i0}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, получим полином $\Omega_0(x) = \sum_{i=0}^{n} c_{i0} v_i(x)$, $L[\Omega_0] = 1$, обращающийся в нуль во всех точках множества $E_0 = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} E_{\nu_m}$, мера которого (ср. ([9]), гл. I) превышает любое из чисел $\mu E - 1/\nu_m$ и, следовательно, равна μE, что противоречит условию линейной независимости (2).

Лемма 2. *Имея какую-нибудь систему метрически линейно независимых функций* (1), *для которой, согласно доказанному, неравенство* (3) *выполняется при некотором фиксированном значении числа g, рассмотрим соответствующие полиномы $\Omega(x)$, для которых $L[\Omega] = 1$. Тогда всякому ε, взятому в пределах $0 < \varepsilon < \mu E - g$, можно будет противопоставить такое $\lambda = \lambda_\varepsilon > 0$, чтобы неравенство $|\Omega(x)| \leqslant \eta$ не могло выполняться ни на каком множестве $E_1 \subseteq E$ меры $\mu E_1 \geqslant g + \varepsilon$, если $\eta < \lambda$.*

Доказательство (от противного) весьма сходно с доказательством предыдущей леммы ([10, 2]).

Следствие. При произвольном значении $L = L[\Omega]$ утверждение леммы сохраняет силу, если заменить $\lambda = \lambda_\varepsilon$ на $L\lambda$.

3°. Постановка трех задач апроксимации. Выделяя в качестве допустимых полиномов те, для которых $c_0 = 1$:

$$\Phi(x) = v_0(x) + P(x) = v_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i v_i(x), \qquad (5)$$

мы рассматриваем следующие три задачи.

a) Задача среднего степенного приближения по данному индексу $m > 1$:

$$\left[\frac{1}{\mu E}\int\limits_E |\Phi(x)|^m\, d\mu\right]^{1/m} = \delta_m[\Phi] = \delta_m(c_1, \ldots, c_n) = \min; \qquad (6)$$

предполагается конечность интегралов ([8, 9]) $\int\limits_E |v_i(x)|^m\, d\mu$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

b) Задача квазиравномерного приближения:

$$\operatorname{vrai}\max_{x\in E} |\Phi(x)| = \delta_0^*[\Phi] = \delta_0^*(c_1, \ldots, c_n) = \min. \qquad (7)$$

Здесь функции (1) предполагаются ограниченными почти везде на множестве E.

c) Задача равномерного приближения:

$$\sup_{x \in E} |\Phi(x)| = \delta_0[\Phi] = \delta_0(c_1, \ldots, c_n) = \min, \tag{8}$$

где функции (1) предполагаются ограниченными в обычном смысле на множестве E.

4°. О средних степенных приближениях. Поставим в соответствие каждому $\Phi(x)$ „точку“ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ в декартовом (терминология Менгера — Фреше) пространстве соответствующего числа измерений. Из леммы 1 и следствия леммы 2 легко видеть (ср. доказательство теоремы 1 ниже), что $\delta_m[\Phi] \to \infty$ при $L[\Phi] \to \infty$. Таким образом приходим к задаче отыскания минимума непрерывной (в силу неравенства Минковского) функции $\delta_m(c_1, \ldots, c_n)$ в ограниченной и замкнутой области упомянутого декартова пространства, и существование хотя бы одного решения $\Phi_m = v_0 + c_{1m} v_1 + \ldots + c_{nm} v_n$ оказывается обеспеченным по теореме Больцано—Вейерштрасса. Единственность решения $\Phi_m(x)$ легко устанавливается далее соответствующим распространением способа доказательства, примененного Джексоном [4].

Теорема 1. *Если хотя бы один из допустимых полиномов $\overline{\Phi} = v_0 + \bar{c}_1 v_1 + \ldots + \bar{c}_n v_n$ является ограниченным почти везде на множестве E, причем интегралы $\int_E |v_i(x)|^m d\mu$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ мы предположим здесь конечными для всех $m > 1$, то коэффициенты полинома-решения $\Phi_m(x)$ являются равномерно ограниченными для всех $m > 1$.*

Доказательство получается из неравенства $\delta_m[\Phi_m] \leqslant \delta_m[\overline{\Phi}]$ на основе следствия леммы 2: взяв фиксированное $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \mu E - g)$ и полагая $L[\Phi_m] = L_m$, $\operatorname{vrai}\max|\overline{\Phi}(x)| = M$, имеем $(L_m \lambda_\varepsilon)^m (\mu E - g - \varepsilon) < M^m \cdot \mu E$, откуда $L_m < \dfrac{M \cdot \mu E}{\lambda_\varepsilon (\mu E - g - \varepsilon)}$ для всех $m > 1$.

5°. Приближения квазиравномерные и их связь со средними степенными: первое обобщение теоремы Полиа—Джексона.

Учитывая устанавливаемую без труда непрерывность функции $\overset{*}{\delta}_0(c_1, \ldots, c_n)$ и, как в предыдущей рубрике, опираясь на следствие леммы 2, убеждаемся аналогичным образом в существовании хотя бы одного решения $\overset{*}{\Phi}_0 = v_0 + \overset{*}{c}_{10} v_1 + \ldots + \overset{*}{c}_{n0} v_n$ задачи (7). Решение здесь может быть либо однозначным, либо бесконечно-многозначным: вместе с $\overset{*}{\Phi}_{0\mathrm{I}}$, $\overset{*}{\Phi}_{0\mathrm{II}}$ будет решением и $\overset{*}{\Phi}_{0\mathrm{I}}(x)\cos^2\varphi + \overset{*}{\Phi}_{0\mathrm{II}}(x)\sin^2\varphi$ $(0 \leqslant \varphi = \mathrm{const} \leqslant \pi/2)$.

Теорема 2. *При условиях рассматриваемой задачи (7) всегда имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{m \to \infty} \overset{*}{\delta}_0[\Phi_m] = \overset{*}{\delta}_0[\overset{*}{\Phi}_0]. \tag{9}$$

Доказательство. Основываясь на теореме 1 и учитывая, кроме того, непрерывную зависимость величины $\overset{*}{\delta}_0[\Phi]$ от коэффициентов полинома $\Phi(x)$, достаточно будет, очевидно, убедиться, что любой полином $\widetilde{\Phi} = v_0 + \tilde{c}_1 v_1 + \ldots + \tilde{c}_n v_n$, „предельный“ (в смысле $c_{im} \to \tilde{c}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$) для какой-нибудь последовательности Φ_{m_ν}, где $m_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$, является одним из полиномов $\overset{*}{\Phi}_0(x)$. Но если, допустив противное, предположить, что $\delta_0^*[\tilde{\Phi}]$ превышает величину $\delta_0^*[\Phi_0^*] = \rho$ более, чем на $3\varepsilon > 0$, то $|\tilde{\Phi}(x)|$ будет превышать $\rho^* + 2\varepsilon$ на некотором множестве $E_1 \subseteq E$ меры $\mu E_1 = \sigma > 0$; почти везде на том же множестве мы будем иметь $|\Phi_{m_\nu}(x)| > \rho^* + \varepsilon$ при $\nu > \nu_\varepsilon$; это же, как легко видеть, приводит к явному противоречию с неравенством $\delta_{m_\nu}[\Phi_{m_\nu}] \leqslant \delta_{m_\nu}[\Phi_0^*]$ при достаточно больших m_ν.

6°. Приближения равномерные и соответствующее второе обобщение теоремы Полиа—Джексона.

В случае задачи (8) доказательство существования хотя бы одного решения $\Phi_0 = v_0 + c_{10} v_1 + \ldots + c_{n0} v_n$ осуществляется совершенно подобно тому, как и в случае предыдущей задачи (7), причем и здесь решение оказывается либо однозначным, либо бесконечно-многозначным*. Что касается обобщения предельного соотношения Полиа—Джексона, то оно здесь оказывается возможным, вообще, лишь в форме следующего предложения, являющегося прямым следствием доказанной нами теоремы 2.

Теорема 2'. *Предельное соотношение*

$$\lim_{m \to \infty} \delta_0[\Phi_m] = \delta_0[\Phi_0] \tag{10}$$

имеет место всякий раз, когда функции (1) *и множество* E, *подчиненные общим требованиям рубрик* 1° *и* 3° (c), *определены таким образом, что для полиномов* $\Phi(x)$ *выполняется условие*

$$\sup_{x \in E} |\Phi(x)| = \operatorname{vrai}\max_{x \in E} |\Phi(x)|. \tag{11}$$

В силу этой теоремы предельный полином любой сходящейся последовательности полиномов $\Phi_{m_\nu}(x)$ $(m_\nu \to \infty)$ оказывается при выполнении условия (11) одним из чебышевских (обобщенных) полиномов $\Phi_0(x)$.

Если, например, реализовать абстрактное множество E в виде некоторой области евклидова R_n, то для выполнения условия (11) достаточно будет потребовать, чтобы полиномы $\Phi(x)$ обладали в каждой точке $x \in E$, так сказать, частичной непрерывностью (ослабленной формой асимптотической непрерывности), именно — непрерывностью относительно какого-нибудь подмножества, имеющего в любой окрестности этой точки меру > 0. В частности, если, например, $E \equiv (a, b)$ (открытый интервал в R_1), то окажется более чем достаточным предположить одностороннюю (скажем, правостороннюю) непрерывность всех $n+1$ функций $v_i(x)$ в каждой точке.

Поступило
5 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, ДАН, **28**, № 5 (1940). [2] Е. Я. Ремез, Матем. сб., **9** (51): 2 (1941). Ювіл. Збірник АН УРСР, **1** (1944). [3] G. Pólya, C. R., **157** 840 (1913). [4] D. Jackson, Trans. Am. Math. Soc., **22**, 117, 158, 320 (1921). [5] G. Julia, C. R., **182**, 556, 1201, 1155 (1926). [6] Е. Я. Ремез, ДАН, **58**, № 7 (1947). [7] Е. Я. Ремез, ДАН, **58**, №№ 8, 9 (1947). [8] M. Fréchet, Bull. Soc. Math. de France, **43**, 248 (1915). [9] S. Saks, The Theory of the Integral, Warszawa, 1937. [10] Е. Я. Ремез, Доповіді АН УРСР, № 11 (1940). [11] Е. Я. Ремез, Про методи найкращого, в розумінні Чебишева, наближ. предст. функцій, Вид. УАН, 1935; Збірн. праць Ін-т. матем. АН УРСР, **1** (1938).

---

* Поскольку дело касается самой задачи (8) вне ее связи с двумя другими задачами (6) и (7), ни множество E, ни определение меры μe, как нетрудно понять, не играют в ней никакой существенной роли: играет фактически роль лишь множество систем значений функций (1) при $x \in E$. Исключение „параметра" x приводит к „задаче минимального приближения", касающейся решения системы (обычно неисчислимо бесконечной) несовместных линейных $(n+1)$-членных уравнений, которая была предметом некоторых исследований автора ([11]).