Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Г. КРЕЙН и Б. Я. ЛЕВИН

О СИЛЬНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 I 1948)

Мы будем называть функцию $f(x)$ сильно представимой сингулярным интегралом с ядром $\varphi_n(x, t)$ в точке x, если

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x, t)\ |f(t)-f(x)|\ dt=0. \tag{1}$$

Точки Лебега при этом будут точками сильной представимости функций сингулярным интегралом с ядром Стеклова, которое равно $1/2h$ на сегменте $[x-h, x+h]$ и 0 вне его.

В этой заметке мы решаем следующую проблему:

Дано однопараметрическое семейство неотрицательных ядер $\theta_\tau(x,t)$ $(\tau\leqslant 1)$; каковы необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность $\varphi_n(x,t)$, чтобы (1) было выполнено во всех точках x, где

$$\lim_{\tau\to 0}\int_a^b \theta_\tau(x, t)\ |f(t)-f(x)|\,dt=0. \tag{2}$$

Для конкретных ядер задачи подобного типа решались Харшиладзе [1]. В общем виде эта проблема сформулирована в статье Б. И. Коренблюма [2].

В том случае, когда $\theta_\tau(x,t)=1/2\tau$ на сегменте $[x-\tau, x+\tau]$ и нулю вне его, точки, в которых выполнено (2), суть точки Лебега, и из наших результатов следуют результаты Лебега [3], Д. Фаддеева [4] и Б. И. Коренблюма [2] о представимости сингулярными интегралами в точках Лебега функций классов M, L^1, L^p.

Методы, которыми мы решаем эту проблему для различных классов функций, являются дальнейшим развитием общих методов, изложенных нами в заметке [5], с той особенностью, что здесь нам приходится опираться на некоторые результаты теории конусов в пространстве Банаха, принадлежащие М. Г. Крейну [6].

1. Пусть в банаховом пространстве E задан конус K, т. е. множество элементов, обладающее свойствами:

1 a. Если $f\in K$ $(f\neq\theta)$, то $-f\,\overline{\in}\,K$.

1 b. $\lambda f+\mu g\in K$, если $f\in K$, $g\in K$ и λ, $\mu\geqslant 0$.

Условимся писать $f\geqslant g$, если $f-g\in K$. Следуя М. Г. Крейну, назовем конус острым, если выполнено условие:

1 c. $\|f\|\leqslant\|g\|$, если $\theta\leqslant f\leqslant g$.

Функционал $\varphi(f)$, заданный на пространстве E, назовем позитивным, если $\varphi(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant \theta$.

Мы скажем, что функционал $\varphi(f)$ ограничен на конусе K, если $|\varphi(f)| \leqslant C \| f \|$ при $f \geqslant \theta$. Наконец, введем

Определение 1. Позитивный функционал $\Phi(f)$ назовем мажорантой функционала $\varphi(f)$, если

$$|\varphi(f)| \leqslant \Phi(f) \text{ при } f \geqslant \theta.$$

В дальнейшем мы опираемся на следующую лемму.

Лемма. *Для того чтобы аддитивный однородный функционал $\varphi(f)$ был ограничен на остром конусе K, необходимо и достаточно, чтобы для него существовала мажоранта $\Phi(f)$, являющаяся линейным функционалом в пространстве E.*

Мажоранта $\Phi(f)$ может быть выбрана так, что

$$\| \Phi \| \leqslant 2 \sup_{f \in K} \frac{|\varphi(f)|}{\| f \|}.$$

Если $\varphi(f)$ позитивен, то существует мажоранта такая, что

$$\| \Phi \| = \sup_{f \in K} \frac{\varphi(f)}{\| f \|}.$$

Доказательство этой леммы, которое проводится с помощью теоремы о существовании позитивного функционала, было в своей главной части указано нам М. Г. Крейном.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что конус K и норма пространства E, кроме свойств 1 a, b, c, обладают еще такими свойствами:

2 a. Для каждого элемента $f \in E$ найдется элемент $|f|$ такой, что $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, причем $|f| \leqslant g$, если g удовлетворяет неравенствам $-g \leqslant f \leqslant g$.

2 b. $\| |f| \| = \| f \|$ *.

При выполнении условий 2 a, b имеет место утверждение:

α) *Всякий аддитивный однородный функционал $\varphi(f)$, ограниченный на конусе, является линейным.*

2. Пусть в пространстве E задано семейство ограниченных линейных операторов P_ε $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$, обладающее свойствами: 1) оператор P_ε отображает пространство E на замкнутое подпространство E_ε; 2) $|P_\varepsilon f| \leqslant |f|$; 3) $f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon f$ при любом $f \in E$.

Обозначим $f_\varepsilon = P_\varepsilon f$. Из условий 1 c, 2 b и свойства 2) оператора P_ε следует

$$\| f_\varepsilon \| = \| |f_\varepsilon| \| < \| |f| \| \leqslant \| f \|, \text{ т. е. } \| P_\varepsilon \| \leqslant 1.$$

Определение 2. Однопараметрическое семейство позитивных линейных функционалов $\theta_\tau(f)$ на пространстве E, слабо непрерывное по параметру τ на полуинтервале $0 < \tau \leqslant 1$, назовем сильно сингулярным относительно семейства операторов P_ε, если выполнено условие

$$\text{S)} \qquad \lim_{\tau \to 0} \theta_\tau(|f_\varepsilon|) = 0$$

при любом $f \in E$ и $\varepsilon > 0$.

---

* Ср. В. Канторович (7).

В силу позитивности функционалов θ_τ и определения элемента $|f|$ имеем $|\theta_\tau(f)| \leqslant \theta_\tau(|f|)$, а следовательно, из условия S следует

$$\lim_{\tau\to 0} \theta_\tau(f_\varepsilon) = 0.$$

Таким образом, из сильной сингулярности семейства θ_τ следует его сингулярность в смысле нашей заметки ([5]).

Обозначим через H_0 линейное подмножество пространства E, состоящее из тех элементов $h \in E$, для которых $\lim\limits_{\tau\to 0} \theta_\tau(|h|) = 0$.

Из условия S следует, что $E_\varepsilon \subset H_0$ при всяком $\varepsilon > 0$.

Определение. Аддитивный однородный функционал $\varphi(h)$, определенный на множестве H_0, назовем допустимым, если он удовлетворяет двум условиям: 1) $\varphi(h)$ является ограниченным функционалом на каждом подпространстве E_ε, т. е. $|\varphi(h_\varepsilon)| \leqslant C_\varepsilon \ \| h_\varepsilon \|$; 2) $\varphi(h) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi(h_\varepsilon)$ $(h \in H_0)$.

Постановка задачи. Требуется найти необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность допустимых функционалов $\varphi_n(h)$ слабо сходилась к нулю на множестве H_0, т. е. чтобы из

$$\lim_{\tau\to 0} \theta_\tau(|h|) = 0$$

следовало бы

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = 0. \tag{3}$$

Заметим, что так как вместе с элементом h множеству H_0 принадлежит и элемент $|h|$, то из выполнения (3) для любого элемента H_0 будет также следовать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(|h|) = 0$.

Для того чтобы решить поставленную задачу, мы введем в линейное множество H_0 новую норму соотношением

$$\| h \|_0 = \| h \| + \max_\tau \theta_\tau(|h|).$$

При норме $\| h \|_0$ множество H_0 будет полным нормированным пространством.

Лемма 1. *Всякий допустимый функционал на H_0 является ограниченным по норме H_0, и наоборот, всякий линейный в H_0 функционал является допустимым.*

Отсюда получаем:

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность допустимых функционалов $\varphi_n(h)$ на H_0 слабо сходилась к нулю, т. е. удовлетворяла бы условию* (3), *необходимо и достаточно, чтобы*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(h_\varepsilon) = 0$ *при любом* $h \in H$ *и* $\varepsilon > 0$;

b) $\varphi_n(h)$ *являются линейными функционалами на пространстве* H_0, *т. е.* $\varphi_n \in \overline{H_0}$;

c) $\varphi_n(h)$ *равномерно ограничены по норме, т. е.* $\| \varphi_n \| \leqslant M$ *при* $n = 1, 2, \ldots$

3. Так же как в заметке ([5]), в H_0 можно ввести норму

$$\| h \|_u = \| h \| + \max_\tau |\theta_\tau(h)|.$$

Как мы выяснили в ([5]), общий вид функционала, линейного относительно этой нормы, будет

$$\Phi(h) = \chi(h) + \int_0^1 \theta_\tau(h)\, d\sigma(\tau), \tag{4}$$

где $\chi(h)$ — линейный функционал из $\bar{E}$, а $\sigma(\tau)$ — функция ограниченной вариации, причем норма Φ

$$\| \Phi \|_u = \max (\| \chi \| ,\ \mathrm{var}\, \sigma). \tag{5}$$

Очевидно, что при $h \in H_0$

$$\| h \|_u \leqslant \| h \|_0.$$

Отсюда следует, что функционал $\Phi(h)$ вида (4) будет линейным в пространстве H_0 с нормой $\| h \|_0$.

Назовем конусом K_0 в пространстве H_0 пересечение конуса K пространства E с H_0. Нетрудно проверить, что этот конус обладает всеми свойствами 1 a, b, c и 2 a, b относительно нормы $\| h \|_0$.

Кроме того, очевидно:

$$\| h \|_u = \| h \|_0 \text{ при } h \in K_0. \tag{6}$$

Из этих замечаний следует

Теорема 2. *Для того чтобы аддитивный однородный функционал $\varphi(h)$ в пространстве H_0 был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он имел мажоранту $\Phi(h)$ вида* (4).

Если обозначить $M(\varphi) = \min(\max(\| \chi \|, \mathrm{var}\, \sigma))$, где minimum берется по всевозможным мажорантам вида (4), *то справедливо неравенство*

$$\| \varphi \|_0 \leqslant 2M(\varphi).$$

Если $\varphi(h)$ позитивный функционал, то

$$\| \varphi \|_0 = M(\varphi).$$

Мы ограничимся доказательством первого утверждения. Если функционал $\varphi(h)$ линеен, то он ограничен на конусе K_0 по норме $\| h \|_0$, а значит, в силу (6), и по норме $\| h \|_u$.

Так как конус K_0 по норме $\| h \|_u$ будет острый, то, согласно лемме, функционал $\varphi(h)$ будет иметь мажоранту $\Phi(h)$, ограниченную по норме $\| h \|_u$, т. е. вида (4). Необходимость доказана.

Если функционал $\varphi(h)$ имеет мажоранту $\Phi(h)$ вида (4), то он ограничен на конусе по норме $\| h \|_0$, поскольку ограничен функционал $\Phi(h)$, а тогда, в силу утверждения α), он будет линейным. Достаточность доказана.

4. Приложения наших теорем мы предполагаем изложить в более подробной статье. Укажем здесь только, что в случае, когда за пространство E взято пространство L^p $(p \geqslant 1)$, а операция P_ε и функционалы θ_τ определены так же, как в нашей заметке ([5]), из теорем 1 и 2 непосредственно следуют теоремы, эквивалентные теоремам Д. Фаддеева ([4]) и Б. Коренблюма ([2]), устанавливающие необходимые и достаточные условия для представимости функций класса L^p $(p \geqslant 1)$ сингулярными интегралами в точках Лебега.

Считаем своим приятным долгом выразить благодарность М. Г. Крейну за советы и указания.

Поступило
29 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Харшиладзе, Уч. зап. ЛГУ (1939). [2] Б. Коренблюм, ДАН, **58**, № 6 (1947). [3] H. Lebesgue, Ann. de Toulouse, sér. 3, **1** (1909). [4] Д. Фаддеев, Мат. сб., нов. сер., **1**, в. 3 (1936). [5] С. Крейн и Б. Левин, ДАН, **60**, № 1 (1948). [6] М. Крейн, ДАН, **28**, № 4 (1940). [7] В. Канторович, Мат. сб., 4 (46): 2 (1938),