Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. П. ИВАНЦОВ

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ВОКРУГ ШАРООБРАЗНОГО, ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО И ИГЛООБРАЗНОГО КРИСТАЛЛА, РАСТУЩЕГО В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 15 V 1947)

Рассматривается рост одного кристалла в переохлажденном расплаве при следующих условиях.

Твердая фаза имеет по всей массе $t=t_k$. Температурное поле жидкой фазы, принимаемой неподвижной, подчиняется уравнению Фурье:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t. \tag{1}$$

На границе раздела фаз:

$$t = t_k, \tag{2}$$

$$-\lambda\left(\frac{dt}{\partial n}\right)_{t_k} = q\gamma\left(\frac{dn}{d\tau}\right)_{t_k}, \tag{3}$$

где λ — коэффициент теплопроводности расплава, q — скрытая теплота кристаллизации, γ — удельный вес, одинаковый у обеих фаз.

Температура расплава на бесконечности:

$$t = t_0 \quad (t_k > t_0). \tag{4}$$

Некоторые решения этой задачи были получены следующим способом.

Преобразуем условие (3), заменив $\frac{dn}{d\tau}$ на $-\frac{\partial t}{\partial \tau}\Big/\frac{\partial t}{\partial n}$ и развернув выражение градиента:

$$\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right]_{t_k} = \frac{q\gamma}{\lambda}\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{t_k}. \tag{3'}$$

Введем в условие (3') произвольную функцию температуры $f(t)$ и будем рассматривать получившееся выражение как дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = f(t)\frac{\partial t}{\partial \tau}. \tag{3''}$$

Постановка задачи: найти все поверхности фронта кристаллизации и отвечающие им температурные поля в жидкой фазе, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1) и (3'') и краевым условиям (2), (4) и (3').

Порядок решения задачи: отыскиваются интегралы нелинейного уравнения первого порядка (3''), в которые входят произвольные функции; вид последних определяется с помощью уравнения (1), а произвольные постоянные с помощью (2), (4) и (3').

В некоторых случаях оказалось возможным найти вид произвольной функции и тем самым решить поставленную задачу.

Полный интеграл уравнения (3''), полученный общеизвестным методом Лагранжа—Шарпи, имеет вид:

$$\frac{1+C_1^2+C_2^2}{C_3}F(t)=x+C_1y+C_2z+C_3\tau+C_4, \tag{5}$$

где $F(t)=\int\frac{dt}{f(t)}$; отсюда

$$t=\Phi(x+C_1y+C_2z+C_3\tau+C_4).$$

Этот вид решения удовлетворяет уравнению (1), но интереса не представляет. Исключив из полного интеграла (5) все произвольные постоянные, получим особый интеграл:

$$t=\Phi\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4a\tau}\right)=\Phi\left(\frac{r^2}{4a\tau}\right). \tag{6}$$

С помощью уравнения (1) определяем вид произвольной функции Φ. Она имеет вид:

$$\Phi(u)=C'\left[\frac{e^{-u^2}}{u}-\sqrt{\pi}(1-\operatorname{erf}(u))\right]+C''=C'\Psi(u)+C'', \tag{7}$$

где

$$u=\frac{r}{2\sqrt{a\tau}}=\frac{R}{2\sqrt{a\tau}}\frac{r}{R}=u_0\frac{r}{R}. \tag{8}$$

Здесь R — радиус сферы, являющейся поверхностью раздела фаз ($r>R$).

Учет краевых условий (2), (4) и (3') приводит к уравнению для определения u_0

$$\frac{c(t_k-t_0)}{q}=2\Psi(u_0)u_0^3\,e^{u_0^2} \tag{9}$$

(здесь c — теплоемкость расплава) и к искомому выражению температурного поля:

$$\frac{t-t_0}{t_k-t_0}=\frac{\Psi(u)}{\Psi(u_0)}. \tag{10}$$

Температурное поле вокруг цилиндрического кристалла, полученное аналогичным путем из уравнения (6) для плоского случая:

$$\frac{t-t_0}{t_k-t_0}=\frac{\operatorname{Ei}(-u^2)}{\operatorname{Ei}(-u_0^2)}, \tag{11}$$

где u_0 определяется из уравнения:

$$\frac{c(t_k-t_0)}{q}=-u_0^2\,e^{u_0^2}\operatorname{Ei}(-u_0^2). \tag{12}$$

Отмечаем, что в обоих случаях продвижение фронта кристаллизации пропорционально корню из времени, что следует из выражения (8) для u_0. Изотермические поверхности являются сферами для первого случая и цилиндрами — для второго.

Задавая в полном интеграле (5) произвольные связи между произвольными постоянными и исключая последние, найдем общие интегралы.

Из различных видов исследованных связей представляет интерес линейная связь

$$C_3 = mC_2, \tag{13}$$

которая приводит к следующему общему интегралу, описывающему рост иглообразного кристалла:

$$t = \Phi\left(-z - m\tau + \sqrt{r^2 + (z + m\tau)^2}\right). \tag{14}$$

Изотермические поверхности в этом случае являются софокусными параболоидами вращения, а для плоского случая — софокусными параболическими цилиндрами.

Определяя с помощью уравнения (1) вид произвольной функции Φ в решении (14) и произвольные постоянные с помощью (2), (4) и (3′), получаем выражение температурного поля вокруг иглообразного кристалла, растущего в переохлажденном расплаве:

$$\frac{t - t_0}{t_k - t_0} = \frac{\mathrm{Ei}\left(-\frac{wR}{2a}v\right)}{\mathrm{Ei}\left(-\frac{wR}{2a}\right)}, \text{ где } v = \sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{z - w\tau}{R}\right)^2} - \frac{z - w\tau}{R}. \tag{15}$$

Здесь $R = \mathrm{const}$ — радиус кривизны вершины параболоида, являющегося поверхностью раздела фаз ($v = 1$), $w = \mathrm{const}$ — скорость роста иглы в направлении ее оси.

Параметр $wR/2a$ определяется условием

$$\frac{c\,(t_k - t_0)}{q} = -\frac{wR}{2a} e^{wR/2a}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{wR}{2a}\right). \tag{16}$$

Задавая скорость роста иглообразного кристалла w на основании тех или иных соображений, делаем задачу определенной.

Центральный научно-исследовательский
институт черной металлургии,
Москва

Поступило
31 III 1947