Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 IX 1947)

Рассмотрим две бесконечные среды, представляющие твердую и жидкую фазы одного тела, например воду A_1 и лед A_2, соприкасающиеся по одной плоскости, перпендикулярной оси x, на расстоянии s от начала координат. Рассмотрим случай, когда пространственно процесс будет зависеть только от x. Пусть от $x=-\infty$ до $x=s$ находится A_1, а от $x=s$ до $x=\infty$ A_2. Если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ означают температуры фаз A_1 и A_2, то они будут удовлетворять уравнениям теплопроводности

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (-\infty \leqslant x < s), \tag{1}$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad (s < x \leqslant \infty). \tag{1'}$$

Начальные условия будут $(t=t_0)$:

$$u_1(x, t_0) = \Psi_0(x), \quad u_2(x, t_0) = \Phi_0(x), \tag{2}$$

где Ψ_0 и Φ_0 — данные функции; для нашего случая, очевидно $|\Psi_0(x)| > 0$, $|\Phi_0(x)| < 0$. В точке $x=s(t)$, где температура постоянно равна нулю, имеем условие:

$$\frac{ds}{dt} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{3}$$

Задача Стефана состоит в следующем: определить функции $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $s(t)$, удовлетворяющие (1), (1'), (2), (3).

Эта задача решена Стефаном (1) в случае, когда Ψ_0 и Φ_0 постоянны. Общим случаем занимался M. Brillouin (2), но решения не получил. В случае двух сред конечной длины l_1 и l_2 очень общее решение дал Рубинштейн (3). Случай $l_1=\infty$ и $l_2=\infty$ не может быть получен, по моему, как частный случай из работы (3) помощью предельного перехода. Мы даем решение этого случая. Метод, употребленный здесь, вполне отличен от того, которым пользуется Рубинштейн.

Вначале решим следующую вспомогательную задачу. Пусть A будет одна из фаз (соответствующий индекс, например 2, опустим). Для $t=t_0$ имеем $u(x, t_0)=\Phi_0(x)$ $(x_0 < x \leqslant \infty)$. Начиная с момента $t=t_0$, температуру граничной точки O $(x=s)$ поддерживаем равной нулю и одновременно заставляем O двигаться по определенному закону $x=s(t)$. Нужно найти $u(x, t)$ для $x > x_0$ и для времени t $(t_0 < t \leqslant T_0,\ T_0=t_0+T,\ T$ фиксировано).

Допустим, что $s(t)$ имеет производную $\dot{s}(t)>0$ в интервале $(t_0, T_0)=T$. Разобьем T на n частей, соответствующих моментам времени $t_1, t_2, \ldots, t_n=T_0$, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. Моменту t_i соответствует на оси x точка O_i $(x_i=s(t_i))$. Рассмотрим сначала случай, когда O_i движется скачками, т. е. O_i неподвижна для $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, а для $t=t_{i+1}$ мгновенно перескакивает в O_{i+1}. Таким образом, вместо линии $s(t)$ будем иметь ломаную $s_n(t)$.

В интервале Δt_i функция u_i будет удовлетворять (1') $(x>x_i, t>t_i)$, начальному условию $u_i(x, t)=\Phi_i(x)=u_{i-1}(x, t_i)$ и условию на границе $u_i(x_0, t)=0$. Она представится, как известно, в виде

$$u_i(x, t)=\int_{x_i}^{\infty} \Phi_i(\alpha_i) E_i(x, x_i, \alpha_i, t-t_i)\, d\alpha_i, \tag{4}$$

где

$$E_i=E_{i-}-E_{i+}, \tag{4'}$$

$$E_{i-}=\frac{e^{-\frac{(\alpha_i-x)^2}{4a^2(t-t_i)}}}{2a\sqrt{\pi(t-t_i)}}, \quad E_{i+}=\frac{e^{-\frac{(\alpha_i+x-2x_i)^2}{4a^2(t-t_i)}}}{2a\sqrt{\pi(t-t_i)}}. \tag{4''}$$

В (4), где $\Phi_i(x)=u_{i-1}(x, t_i)$ выразим u_{i-1} через u_{i-2}, используя формулу (4) (i заменено на $i-1$) и одновременно изменим порядок интегрирования, потом выразим u_{i-2} через u_{i-3} и т. д. Получим

$$u_i(x, t)=\int_{x_0}^{\infty} \Phi_0(\alpha_0) E^{(i)}(x, [x_i], \alpha_0, t-t_0, [\Delta t_{i-1}])\, d\alpha_0, \tag{5}$$

$$E^{(i)}=\int_{x_i}^{\infty} E_i(x, x_i, \alpha_i, t-t_i) E^{(i-1)}(\alpha_i, [x_{i-1}], \alpha_0, [\Delta t_{i-1}])\, d\alpha_i. \tag{5'}$$

В аргументе $E^{(i)}$ мы писали $[x_i]$. Это означает, что $E^{(i)}$ зависит от всех абсцисс $x_0, x_1, \ldots, x_i$. То же самое для $[\Delta t_i]$. Таким образом, u_i является функционалом $u_i([s_i])$ по отношению к функции $s_n(t)$, так как u_i зависит от всех ее значений в интервале T (при $i=n$). Посредством рекуррентной зависимости (5') можем вычислить все функции $E^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, следовательно, и все u_i, т. е. функцию $u(x, t)$, соответствующую линии s_n.

Так как $x-x_i \geqslant 0$, $x_i \leqslant \alpha_i \leqslant \infty$, (4'') дает, что $|E_{i-}|>|E_{i+}|$. Пусть $\Phi_0(x)$ ограничена, $|\Phi_0(x)|<M$. Заменим в (4) для $i=0$ Φ_0 на M и E_0 на E_{0-}, воспользовавшись (4''). Используя подстановку $\xi=(\alpha_0-x)/2a\sqrt{\pi(t-t_0)}$, будем иметь из (5) или (4):

$$|u_0(x, t)|<\frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-x}{2a\sqrt{t-t_0}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \tag{6}$$

Заменяя нижний предел последнего интеграла на $-\infty$. и усиливая таким образом неравенство, получим $|u_0|<M$. Заменяя в (5) (для $i=1$) u_0 на M, таким же образом получим $|u_1|<M$ и т. д., будем иметь $|u_i(x, t)|<M$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, функция u остается ограниченной, когда $n \to \infty$.

Разобьем снова интервал T на n частей новыми моментами t_i', которым соответствуют $x_i'=s(t_i')$. Повторяя прежние рассуждения, получим вместо u_i (5) функцию $u_i'(x, t)$, получающуюся из (5) штрихованием t_i, x_i, $E^{(i)}$. Так как для получения u_p для определенного p $(i \leqslant p \leqslant n)$ мы заменим в функционале $u_p([s_p])$ кривую s_p кривой

s'_p, мало отличающейся от s_p, то u_p изменится на $\delta u_p = u'_p - u_p$. Изменение δu_p находится из формулы (4):

$$\delta u_p = \int_{t_0}^{t_p} \dot{u}_p([s_p], \xi)\, \delta s_p d\xi. \tag{7}$$

Производная $\dot{u}_p$ дается выражением

$$\dot{u}_p([s_p], \xi) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\Delta u_p}{\Delta \sigma}, \tag{8}$$

где Δu_p представляет изменение u_p, соответствующее изменению s в окрестности только одной фиксированной точки $t = \xi$, а $\Delta\sigma$ соответствующее изменение поверхности, заключенной между s и осью t.

Рассмотрим линию s'_p, совпадающую с s_p в интервалах (t_0, t_i) и (t_{i+1}, t_p). Выберем в интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ точку t_ξ, $\Delta t_\xi = t_{i+1} - t_\xi$. Пусть линии s_p и s'_p совпадают и в интервале $\overline{\Delta t_i} = t_\xi - t_i$, а в интервале Δt_ξ имеем $s'_p = s(t_\xi)$. Их разность будет $\Delta s_p = s'_p - s_p = s(t_\xi) - s(t_i) = \dot{s}(t_i)\overline{\Delta t_i}$, а $\Delta\sigma = \dot{s}(t_i)\overline{\Delta t_i}\Delta t_\xi$. Образуем по формуле (5) функции $u_i(x, t_{i+1})$ и $u'_i(x, t_{i+1})$, имеющие для $t = t_i$ общее начальное значение $u_{i-1}(x, t_i)$, $u'_i(x_\xi, t) = 0$ $(t < t \leqslant t_{i+1})$. Для разности Δu_i получается:

$$\Delta u_i = u'_i(x, t_{i+1}) - u_i(x, t_{i+1}) = \int_{x_i}^{\infty} d\alpha_i u_i(\alpha_i, t_i)\, \Delta E_i, \tag{9}$$

$$\Delta E_i = \int_{x_\xi}^{\infty} E_\xi(x, x_\xi, \alpha_\xi, \Delta t_\xi)\, E_i(\alpha_\xi, x_i, \alpha_i, \overline{\Delta t_i})\, d\alpha_\xi - E_i(x, x_i, \alpha_i, \Delta t_i). \tag{9'}$$

Считая $\Phi_i(x) = u_i(x, t_{i+1})$ и $\Phi'_i(x) = u'_i(x, t_{i+1})$ начальными значениями функции u_p и u'_p, можем составить посредством формулы (5) функции u_p и u'_p, используя (9). Находим:

$$\Delta u_p = u'_p - u_p = \int_{x_{i+1}}^{\infty} \Delta u_i E^{(p)}\, d\alpha_i, \tag{10}$$

где $E^{(p)}$ получается по формуле (5'). Посредством простых, но довольно длинных вычислений найдем значение интеграла в (9'). Тогда убедимся, что $\Delta u_i / \overline{\Delta t_i} \Delta t_\xi$ стремится к конечному пределу, когда $\Delta t_i \to 0$ и $\Delta t_\xi \to 0$. То же самое будет для $\Delta u_p / \overline{\Delta t_i} / \overline{t_i} \Delta t_\xi$. Следовательно, $\dot{u}_p(9)$ существует. Если таким же образом варьировать кривую s_p сначала около точки t_1, потом около t_2 и т. д., получим, что $\dot{u}_p$ существует для каждого $t = \xi$. Обозначая через N верхнюю границу u_p, найдем из (7)

$$\delta u_p < N \int_{t_0}^{t_p} \delta s_p d\xi < N \delta_M (t_p - t_0), \tag{11}$$

где δ_M — максимальная вариация s_p в интервале (t_0, t_p), так что δu_p стремится к нулю вместе с δ_M. Следовательно, u_i (5) стремится к определенному пределу $u(x, t)$, независимо от того, каким образом $n \to \infty$, если только все $\Delta t_i \to 0$ одновременно. Этим доказано, что решение единственно.

Мы изучали процесс в одном определенном интервале времени T, но ясно, что рассуждения справедливы для произвольного T.

Введенное для удобства ограничение $\dot{s}(t)>0$ несущественно и может быть опущено.

Почти очевидно, что найденная предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет (1'), так как она построена из элементарных решений уравнения (1'). Для того чтобы доказать это строго, вычислим из (5) производные $\dot{u}_{i+1, t}$ и $\ddot{u}_{i+1, x}$ $(i=1, 2, \ldots)$ для фиксированного x и $t=t_{i+1}+\varepsilon$, $\varepsilon\to+0$. Полученные производные и их предельные значения для $t=t_{i+1}$ удовлетворяют (1'), что легко проверить непосредственно. Нетрудно проверить, что $\dot{u}_{i, t}(x, t_i)-\dot{u}_{i+1, t}(x, t_{i+1})$ стремится к нулю вместе с Δt_i, т. е. $\dot{u}_{i,t}$ непрерывна. То же самое получается для $\ddot{u}_{i,x}$. Следовательно, найденная функция $u(x, t)$ удовлетворяет (1') в каждой точке плоскости x, t между x и кривой s, исключая точки кривой s.

Теперь нетрудно решить задачу Стефана. Разобьем интервал (t_0, t_0+T), в котором изучаем процесс, на n частей посредством точек t_i, соответственно $x_i=s_i$. Рассмотрим такой процесс, при котором в интервале Δt_i абсцисса s остается равной s_i, потом сразу меняется на s_{i+1}. Тогда в интервале Δt_i температурная функция A_2 будет $u_{2, i}$, данная (5) (u_i и a снабжаем индексом 2), а u_i для A_1 будет $u_{1, i}(x, t)$, данная (4), где пределы интегрирования суть $-\infty$, x_0 (a заменено на a_1 и $\Phi_i(x)$ на $\Psi(x)$). Применяя эту формулу многократно, получим, как в (5),

$$u_{1,i}(x, t)=\int_{-\infty}^{x_0}\Psi_0(\alpha_0)\,F^{(i)}(x[x_i], \alpha_0, t-t_i, [\Delta t_{i-1}])\,d\alpha_0, \tag{12}$$

где $F^{(i)}$ получается из $E^{(i)}$ (5') заменой a на a_1. Неизвестные изменения s_i определим, используя (3). Рассмотрим для времени t $(t_i<t\leqslant t_{i+1})$ следующее условие, заменяющее (3),

$$\frac{ds}{dt}=k_1\frac{\partial u_{1, i}}{\partial x}-k_2\frac{\partial u_{2, i}}{\partial x}, \tag{13}$$

где в правой части (13) x заменено на s_i. Тогда правая часть (13) представляет известную функцию t. Интегрируя (13) по t от t_i до t_{i+1} и суммируя равенства для $i=0, 1, 2, \ldots, p$ $(p\leqslant n)$, получим

$$s(t_p)-s(t_0)=\sum_{i=0}^{p-1}[s(t_{i+1})-s(t_i)]=\sum_{i=0}^{p-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(k_1\frac{\partial u_{1, i}}{\partial x}-k_2\frac{\partial u_{2, i}}{\partial x}\right)dt. \tag{14}$$

Заставим в (14) $n\to\infty$ и все $\Delta t_i\to 0$ одновременно. Так как $u_{1, i}$, $u_{2, i}$ и их производные при $n\to\infty$ стремятся к определенным пределам, правая часть (14) стремится к определенному пределу—функции от t. А так как при $\Delta t_i\to 0$ условие (13) становится идентичным условию (3), то (14) дает искомое решение $s(t)$. Зная $s_i(t)$, т. е. $s(t)$, из функций $u_{2, i}$ (5) и $u_{1, i}$ (12) получаем искомые функции $u_2(x, t)$ и $u_1(x, t)$.

При конкретной проблеме мы должны разбить интервал T на конечное число частей n и тогда, применив конечное число раз формулы (5), (12), (14), будем иметь приближенные значения функций u_1, u_2, s. При этом ясно, что чем больше n, тем лучше приближение.

Поступило
12 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Stefan, Sitz-Ber. Ak. Wiss., Wien (1889). [2] M. Brillouin, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1 (1931). [3] Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 11, № 1 (1947). [4] V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales, Paris, 1913.