Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ „ПУТИ СМЕШЕНИЯ“ НА ОБТЕКАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОФИЛЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 III 1947)

1. Уравнения турбулентного пограничного слоя, получаемые из уравнений Рейнольдса ([1]), суть

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Прандтль ([2]) рассмотрел случай обтекания пластины ($dp/dx=0$) и, считая в первом приближении, что u и v не зависят от x, получил из (1) и (2) $\tau=\tau_0$.

Сопоставление этой формулы с законом теории „пути смешения“ Прандтля — Кармана ([3])

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}=\varkappa\frac{\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}}, \tag{3}$$

где $t=\frac{y}{\delta}$, $u_2=\frac{\bar{u}-u}{v_*}$ ($\bar{u}$ — значение скорости на границе слоя, $v_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ — динамическая скорость, δ — толщина слоя), и дает известный закон Прандтля — Никурадзе

$$u_2=-\frac{1}{\varkappa}\ln t. \tag{3'}$$

Однако попытки непосредственного перенесения этого закона на случай обтекания криволинейных профилей оказались несостоятельными ввиду резкого несоответствия эксперименту.

2. Рассмотрим теперь случай обтекания криволинейных профилей ($dp/dx\neq 0$) и покажем, что для него может быть получено обобщение изложенной выше теории.

Принимая опять (в качестве первого приближения), что u и v не зависят от x, получаем из (1) и (2) распределение напряжения трения для криволинейного профиля

$$\frac{\tau}{\tau_0}=1+b(x)\,t; \tag{4}$$

здесь $b(x)=\frac{\delta\, dp/dx}{\tau_0}$ — форм-фактор.

Таблица 1

Симметричное крыло Жуковского с относительной толщиной в 15% от хорды

Сечение $x=0{,}7119$ м $(x/l=0{,}706)$, $\delta=0{,}037$ м

$\tau_0=0{,}183$ кг/м², $dp/dx=36$ кг/м², $\overline{u}=26{,}4$ м/сек.

$$v_*=\sqrt{\tau_0/\rho}=1{,}14 \text{ м/сек.}, \quad b\,(x)=\delta\,\frac{dp}{dx}/\tau_0=2{,}70$$

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0	1,37	2,74	4,11	5,48	6,85	8,22	9,59	10,96	12,33	13,70
u по (5)	0	18,2	20,3	21,6	22,6	23,4	24,4	24,8	25,4	25,8	26,4
u по Фейджу	0	17,0	19,3	20,7	22,0	23,3	24,2	25,2	25,8	26,0	26,4

Таблица 2

Крыло Геттинген 397

Хорда $l=40$ см, угол атаки $\alpha=12°$, сечение $x=27{,}20$ см,

$\delta=0{,}0075$ м, $\tau_0=0{,}3278$ кг/м², $dp/dx=288$ кг/м³, $\overline{u}=37{,}4$ м/сек.,

$$v_*=\sqrt{\tau_0/\rho}=1{,}64 \text{ м/сек.}, \quad b\,(x)=\delta\,\frac{dp}{dx}/\tau_0=6{,}6$$

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50	5,25	6,00	6,75	7,50
u по (5)	0	23,7	27,7	29,5	31,3	32,7	33,6	34,9	35,7	36,3	37,4
u по Грушвицу	0	20,8	27,4	29,6	31,2	32,7	34,0	35,2	35,9	36,7	37,4

Таблица 3

Симметричное крыло Жуковского с относительной толщиной в 15% от хорды

Сечение $x=0{,}8135$ м $(x/l=0{,}807)$, $\delta=0{,}0162$ м,

$\tau_0=0{,}1175$ кт/м², $dp/dx=34{,}25$ кг/м², $\overline{u}=24{,}9$ м/сек.,

$$v_*=\sqrt{\tau_0/\rho}=0{,}97 \text{ м/сек.}, \quad b\,(x)=\delta\,\frac{dp}{dx}/\tau_0=4{,}72$$

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0	1,62	3,24	4,26	6,48	8,10	9,72	11,34	12,96	14,58	16,20
u по (5)	0	21,4	19,0	20,4	21,3	22,1	22,8	23,4	23,5	24,4	24,9
u по Фейджу	0	16,5	18,1	19,3	20,7	22,1	23,0	23,9	24,3	24,7	24,9

Таблица 4

Симметричное крыло Жуковского с относительной толщиной в 15% от хорды

Сечение $x=0{,}610$ м $(x/l=0{,}60$[illegible]$)$, $\delta=0{,}01122$ м,

$\tau_0=0{,}1735$ кг/м², $dp/dx=32{,}65$ кг/м³, $\overline{u}=27{,}4$ м/сек.,

$$v_*=\sqrt{\tau_0/\rho}=1{,}18 \text{ м/сек.}, \quad b\,(x)=\delta\,\frac{dp}{dx}/\tau_0=2{,}11$$

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0	1,12	2,24	3,36	4,48	5,60	6,72	7,84	8,96	10,08	11,20
u по (5)	0	18,2	20,4	21,8	22,8	23,7	24,5	25,0	25,6	26,1	27,4
u по Фейджу	0	18,3	20,4	22,3	23,6	24,4	25,2	25,9	26,5	27,0	27,4

Сопоставляя (4) и (3), находим закон распределения скоростей в виде

$$u_2(x,t) = \frac{1}{\varkappa}\left[\sqrt{1+b(x)} - \sqrt{1+b(x)t} + \ln\frac{\sqrt{1+b(x)}-1}{\sqrt{1+b(x)t}-1}\right]. \tag{5}$$

Для $dp/dx = 0$ формула (5) переходит в закон (3′). Поэтому, в соответствии с опытами Никурадзе, будем брать $\varkappa = 0{,}4$.

3. Покажем прежде всего, что формула (5) весьма хорошо согласуется с экспериментальным распределением скоростей для крыльев по опытам Фалькнера и Фейджа ([4]) и Грушвица ([5]). Об этом свидетельствуют табл. 1—4.

4. Получим теперь, исходя из формулы (5), закон сопротивлений для криволинейного профиля и покажем, что он также хорошо согласуется с экспериментами.

Формула (5) на границе ламинарного подслоя дает (мы раскладываем $\sqrt{1+b(x)\frac{\delta_л}{\delta}}$ в ряд по степеням $\frac{\delta_л}{\delta}$ и пренебрегаем ввиду малости $\delta_л$ квадратами и более высокими степенями, а также $\frac{\delta_л}{\delta}$ по сравнению с $\ln\frac{\delta_л}{\delta}$)

$$\frac{\bar{u} - u_л}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\left[\sqrt{1+b(x)} - 1 + \ln\left(\sqrt{1+b(x)}-1\right) - \ln\frac{b(x)}{2} - \ln\frac{\delta_л}{\delta}\right].$$

С другой стороны, в ламинарном подслое, как известно, имеем

$$u_л = \frac{\tau_0}{\mu}\delta_л = \frac{\tau_0}{\mu}\frac{\alpha\nu}{v_*} = \alpha v_*$$

(здесь α — экспериментальная константа).

Сопоставляя полученные формулы, находим, вводя коэффициент сопротивления

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho \bar{u}^2/2} = \frac{2 v_*^2}{\bar{u}^2},$$

закон сопротивления в виде

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \alpha + \frac{1}{\varkappa} q, \tag{6}$$

где

$$q = \sqrt{1+b(x)} - 1 + \ln\frac{2\left(\sqrt{1+b(x)}-1\right)}{b(x)} - \ln\alpha + \mathrm{R} \tag{6'}$$

R — динамическое число Рейнольдса.

Таблица

x м	0,403	0,454	0,508	0,554	0,610	0,655	0,711	0,813	0,855	0,907	0,964
$\bar{u}_0$ м/сек. . .	29,2	28,8	28,3	27,9	27,4	27,0	26,4	24,9	24,4	23,8	23,4
τ_0 кг/м^2 . .	0,239	0,217	0,196	0,184	0,173	0,170	0,183	0,117	0,110	0,103	0,089
dp/dx кг/м^3	39,7	44,2	24,8	26,4	38,6	36,6	36,0	34,2	29,2	34,3	39,4
v_* м/сек. .	1,38	1,31	1,25	1,21	1,18	1,17	1,14	0,97	0,94	0,91	0,84
δ м	0,007	0,008	0,008	0,010	0,011	0,012	0,014	0,016	0,017	0,019	0,020
$\ln \mathrm{Re}_*$ . .	6,53	6,59	6,55	6,74	6,82	6,91	6,98	6,99	7,02	7,07	7,06
$b(x)$ . . .	1,20	1,62	1,02	1,45	2,11	2,68	2,70	4,72	4,56	6,07	8,77
b	4,42	4,59	4,42	4,67	4,92	5,09	5,17	5,50	5,49	5,77	6,09
$\sqrt{2/c_f}$ по (6)	21,55	21,97	21,55	22,17	22,80	22,72	23,42	24,25	24,20	24,92	25,72
$\sqrt{2/c_f}$ по ([4])	21,15	21,05	22,60	23,00	23,22	23,20	23,15	25,05	25,70	26,05	26,95

Табл. 5 показывает хорошее совпадение полученного нами закона сопротивлений (6) с экспериментами Фалькнера и Фейджа над крыльями Жуковского.

Константы α и $\varkappa$ определились: $\alpha = 10{,}5$ и $\varkappa = 0{,}40$.

Весьма существенно, что сопоставление теории с экспериментами дает одинаковые значения для константы $\varkappa$ как в законе скоростей, так и в законе сопротивлений.

Поступило
11 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Reynolds, Phil. Trans., A, 186 (1895). [2] L. Prandtl, V. D. I., 77, No. 5 (1933). [3] Th. v. Karman, Verchandl. 3. Intern. Kongr. Techn. Mech. (1930). [4] A. Fage and V. Falkner, ARSR, No. 1315 (1931). [5] F. Gruschwitz, Ing. Archiv, 2, H. 3 (1931).