Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

К ТЕОРИИ СТОЯЧИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 8 V 1947)

Рассмотрим плоский поток тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой постоянно давление $p=0$. Мы ищем точный вид стоячих волн конечной амплитуды на поверхности данной жидкости. Нам известны только две работы, посвященные такой задаче. Это — статья Гюйу 1893 г. ([1]) и работа Ларра 1937 г. ([2]). Однако оказалось, что обе эти работы не строги. Поэтому мы попытались точно решить поставленную задачу и здесь кратко излагаем полученные результаты.

В плоскости течения берем прямоугольную систему координат xOy; ось x совместим с прямой — горизонтальным уровнем покоящейся жидкости; ось y направим вертикально вверх.

Решаем задачу в переменных Лагранжа a и b. Ищем $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ — декартовы координаты частицы жидкости, а также $Q(a, b, t)$ — функцию, связанную с давлением $p(a, b, t)$ формулой $Q=-\frac{p}{\rho}-gy$, где ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, t — время. Требуем, чтобы при $t=0$, т. е. в начальный момент, а следовательно и во все время движения, свободной поверхности отвечало значение $b=0$.

Мы предполагаем, что жидкость совершает периодические колебания; свободная поверхность при этом является стоячей волной, точный вид которой мы ищем; форма стоячей волны известна лишь приближенно — из линейной теории. Пусть при $t=0$

$$x(a, b, 0)=a, \quad y(a, b, 0)=b+f(a). \tag{1}$$

Из (1) следует, что при $t=0$ уравнение профиля волны ($b=0$) имеет вид

$$y=f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ по условию неизвестная искомая функция.

Граничное условие $p=0$ при $b=0$ для $Q(a, b, t)$ примет вид

$$Q(a, 0, t)=-gy(a, 0, t). \tag{3}$$

Мы ищем волну малой амплитуды и мало отличающуюся от той, которая дается линейной теорией. Поэтому вводим малый параметр ε и делаем замену:

$$x=a+\varepsilon\xi, \quad y=b+\varepsilon\gamma+\varepsilon\eta, \quad f(a)=\varepsilon\gamma, \quad Q=\varepsilon q; \tag{4}$$

здесь $\xi=\xi(a, b, t, \varepsilon)$; $\eta=\eta(a, b, t, \varepsilon)$, $q=q(a, b, t, \varepsilon)$, $\gamma=\gamma(a, \varepsilon)$. Обозначим через σ частоту колебания и через k величину, обратную периоду L по a, т. е. $k=2\pi/L$.

Мы показываем, что в результате приходим к следующей математической задаче.

Определить функции q, ξ, η, γ и константу $k=k(\sigma, \varepsilon)$ так, чтобы:

Во-первых, удовлетворялись дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\varepsilon\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\frac{\partial(\eta+\gamma)}{\partial a}\right]=\frac{\partial q}{\partial a}, \\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\varepsilon\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)=\frac{\partial q}{\partial b}, \\
\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}=-\varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\eta}{\partial b}-\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial(\eta+\gamma)}{\partial a}\right],
\end{gathered} \tag{5}$$

получающиеся из уравнений гидродинамики; выполнялись начальные и граничные условия

$$\xi(a, b, 0, \varepsilon)=0, \quad \eta(a, b, 0, \varepsilon)=0, \tag{6}$$

$$q(a, 0, t, \varepsilon)=-g[\eta(a, 0, t, \varepsilon)+\gamma(a, \varepsilon)], \tag{7}$$

вытекающие из (1) и (3).

Во-вторых, искомые функции должны быть периодическими по a с периодом $L=2\pi/k$, периодическими по t с периодом $T=2\pi/\sigma$, при этом σ — заданная произвольная величина.

В-третьих, при $\varepsilon=0$ искомые функции и константа должны принимать следующие значения, которые обозначаем буквами с индексом 0 внизу:

$$\begin{gathered}
q_0=-gA_0\sin k_0a\, e^{k_0b}\sin\sigma t, \quad k_0=\sigma^2/g, \quad \gamma_0=0, \\
\xi_0=A_0\cos k_0a\, e^{k_0b}\sin\sigma t, \quad \eta_0=A_0\sin k_0a\, e^{k_0b}\sin\sigma t;
\end{gathered} \tag{8}$$

A_0 — фиксированная константа; формулы (8) определяют исходную линейную волну.

Мы доказываем, что при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ (способ оценки $|\varepsilon|$ мы даем) эта задача имеет единственное решение. При этом все искомые функции и константа оказываются голоморфными функциями ε. Соответствующее течение будет иметь потенциал скоростей.

При решении задачи мы ищем функции и константу в виде степенных рядов по ε; доказываем сходимость этих рядов и единственность определения их коэффициентов; затем показываем, что, если при малых $|\varepsilon|$ решение существует, то оно будет голоморфным по ε. При построении решения, чтобы избежать вековых членов, мы делаем замену переменных, положив $a_1=ka$, $b_1=kb$. Мы рассчитали x, y, Q и k, кончая членами с ε^4. Однако за недостатком места приводим только формулу

$$\frac{2\pi}{L}=k=\frac{\sigma^2}{g}+\zeta^2\frac{\sigma^6}{4g^3}+\zeta^4\frac{6005}{2688}\frac{\sigma^{10}}{g^5} \quad (\zeta=\varepsilon A_0). \tag{9}$$

Положив в x и y $b=0$ и исключив a, мы получаем приближенное уравнение профиля волны:

$$y(x, t, \zeta) = \zeta \sin x \sin \sigma t - \frac{\zeta^2}{2} \cos 2x \sin^2 \sigma t +$$

$$+ \frac{\zeta^3}{32} [(7 \sin x - 9 \sin 3x) \sin \sigma t + (2 \sin x + 3 \sin 3x) \sin 3\sigma t] +$$

$$+ \frac{\zeta^4}{12} \left\{ \left[-\frac{9}{8} + \frac{163}{64} \cos 2x + \left(\frac{173}{64} + \frac{5}{132} \right) \cos 4x \right] \sin^2 \sigma t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{16} + \frac{219}{224} \cos 2x - \frac{25}{32} \cos 4x \right) \sin^2 2\sigma t - \frac{24}{7} \cos 2x - \frac{5}{264} \cos 4x \right\}; \quad (10)$$

при этом взято $k = 1$, а σ надо определить из (9).

В заключение укажем особенности стоячей волны, вытекающие из точного уравнения ее профиля.

1. Неподвижных узлов нет; узлы линейной волны $x=0$ и $x=\pi$ движутся в первом приближении по законам $x = \frac{\zeta}{2} \sin \sigma t$, $x = \pi - \frac{\zeta}{2} \sin \sigma t$.

2. Максимальные амплитуды (пучности) будут в точках $x=\pi/2$ (гребень), $x=3\pi/2$ (впадина) и при $t=\pi/2\sigma$.

3. Ордината гребня волны больше ординаты впадины по абсолютной величине. Волна похожа на трохоиду.

4. При $t=0$ уравнение профиля волны имеет вид (приближенно):

$$y = -\frac{\zeta^4}{24} \left(\frac{48}{7} \cos 2x + \frac{5}{132} \cos 4x \right). \quad (11)$$

Следовательно, в виду произвольности начального момента времени, профиль волны никогда не распрямляется.

Морская гидрофизическая лаборатория
Академии Наук СССР

Поступило
8 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. E. Guyou, C. R., **117**, 722 (1893). [2] M. Larras, Ann. des ponts et chaussées, II, f. 9, 392 (1937).