Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 V 1947)

§ 1. Уравнения движения, уравнение неразрывности и уравнение для тепловой энергии (температуры), а именно

$$\rho \frac{d\vec{c}}{dt} = \rho\vec{F} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{c}, \nabla), \tag{1,1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\theta = 0, \qquad \theta = \operatorname{div}\vec{c}, \tag{1,2}$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\operatorname{div}\vec{j} + P_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + q, \tag{1,3}$$

где u_i — компоненты $\vec{c}$ — скорости элемента объема жидкости, $\vec{j}$ — плотность теплового тока; плюс уравнения

$$P_{ik} = p\delta_{ik} - k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\theta\delta_{ik}\right) + O_{ik}, \tag{1,4}$$

$$\vec{j} = -\varkappa\nabla T + \vec{O}_j, \tag{1,5}$$

$$p = p(\rho, T) + O_p, \tag{1,6}$$

где k, $\varkappa$ — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности, а δ_{ik} — единичный тензор, описывают движение сжимаемой жидкости и распределение в ней температуры, q — заданный „внешний источник“ тепла (например, от фазовых или химических превращений и т. д.). Уравнение (1,6) это, в частности, уравнение Клапейрона или ван-дер-Ваальса. O_{ik}, $\vec{O}_j$ и O_p — поправочные члены, содержащие высшие производные от основных величин, которыми обычно пренебрегают (и мы делаем это далее). Пять фундаментальных уравнений (1,1) — (1,3) плюс уравнения состояния (1,4) — (1,6) образуют замкнутую систему для нахождения пяти основных величин: u_i, p и T при „ламинарном режиме“ (точное определение его см. § 5). Здесь все величины суть результаты молекулярного осреднения, которое выполняется автоматически макроприборами, т. е. они измеряются непосредственно без знания мгновенных молекулярных величин, что есть признак возможности построения замкнутой феноменологической теории.

Отметим два факта: 1-й — можно изготовить внешние условия, когда уравнения (1,1) — (1,6) будут описывать реальные потоки, и 2-й — такое изготовление требует специальных лабораторных условий, являясь осуществлением предельных случаев, обычные же реальные потоки суть турбулентные. Первый факт принципиально сообщает физический смысл введенным величинам, а второй — лишает систему

(1,1) — (1,6) возможности применения к практическим задачам с требуемой точностью. Опираясь на первый факт, надо сконструировать систему уравнений, годную для решения таких задач, т. е. уравнений, описывающих турбулентное движение.

§ 2. Следуя О. Рейнольдсу ([1]), осредним уравнения (1,1) — (1,6) по времени (вообще, также и по пространству). Результат осреднения величины обозначаем чертой над ней. Комбинируя надлежащим образом множество получаемых членов и вводя рациональные обозначения, можно результат записать так:

$$\bar\rho\,\frac{\partial\overrightarrow{\bar c}}{\partial t}=\bar\rho\,\overrightarrow{F}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar P_{ik}+K_{ik}\right)+\overrightarrow{O}_{\bar c},\tag{2,1}$$

$$\frac{D\bar\rho}{Dt}+\bar\rho\,\bar\theta=O_{\bar\rho},\qquad \frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+(\overrightarrow{\bar c},\nabla),\tag{2,2}$$

$$\bar\rho c_v\,\frac{D\bar T}{Dt}=\varkappa\Delta\bar T-\operatorname{div}\overrightarrow{J}+Q+k\Phi_1-\bar p\,\bar\theta+\bar q+O_{\bar T},\tag{2,3}$$

$$\bar\rho\,\frac{D\tau}{Dt}=-\operatorname{div}I-Q-K_{ik}\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_k}+\Psi+O_\tau,\tag{2,4}$$

$$\bar p=\bar p(\bar\rho,\bar T)+O_{\bar p}.\tag{2,5}$$

Здесь введены обозначения:

$$\tau\equiv\frac{1}{2}\,\overline{c'^2},\qquad K_{ik}\equiv\bar\rho\,\overline{u_i'u_k'},\qquad \Phi_1\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\bar u_k}{\partial x_i}\right)^2-\frac{2}{3}\,\bar\theta^2,\tag{2,6}$$

$$Q\equiv-\overline{p'\theta'}+k\Phi_2,\qquad \Phi_2\equiv\frac{1}{2}\,\overline{\sum_{i,k}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\right)^2-\frac{2}{3}\,\theta'^2},\tag{2,7}$$

$$\overrightarrow{J}\equiv\bar\rho\,c_v\,\overline{T'\overrightarrow{c'}},\qquad I\equiv\frac{1}{2}\,\bar\rho\,\overline{c'^2\overrightarrow{c'}},\qquad \Psi\equiv-\frac{\partial}{\partial x_k}\,\overline{(u_i'P_{ik}')},\tag{2,8}$$

причем $T'\equiv T-\bar T$ и $u_i-\bar u_i\equiv u_i'$ — компоненты $\overrightarrow{c'}$ — скорости турбулентных пульсаций. $\overrightarrow{O}_{\bar c}$, $O_{\bar\rho}$, $O_{\bar T}$, O_τ, $O_{\bar p}$ суть выражения, содержащие средние значения из комбинаций величин: $\rho'u_i'$, $\rho'T'$, $\rho'c'^2$, т. е. являются малыми высшего порядка сравнительно с (2,6) — (2,8), и ими можно пренебречь. Уравнения (2,1) — (2,3) получены осреднением (1,1) — (1,3), а уравнение (2,4) — осреднением уравнения энергии, полученного из (1,1), и использованием уравнения энергии, получаемого из (2,1), а именно уравнения

$$\bar\rho\,\frac{D}{Dt}\,\frac{\bar c^2}{2}=\bar\rho\left(\overrightarrow{\bar c},\overrightarrow{F}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\bar u_i\left(\bar P_{ik}+K_{ik}\right)\right]+\left(\bar P_{ik}+K_{ik}\right)\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_k}.\tag{2,9}$$

Уравнения (2,1) — (2,4) суть обобщение известных уравнений О. Рейнольдса ([1]) на сжимаемые жидкости; мы будем также называть их фундаментальными уравнениями феноменологической теории турбулентного движения сжимаемой жидкости. Они имеют место не для всех турбулентных потоков. Подобно тому как молекулярное осреднение, приведшее к уравнениям (1,1) — (1,3), годится лишь для случаев, когда объем осреднения v удовлетворяет неравенствам:

$$\lambda\ll\sqrt[3]{v}\ll\sqrt[3]{V},\tag{2,10}$$

где λ — средняя длина свободного пробега молекулы, а V — объем газа, так и феноменологическое осреднение в уравнениях (2,1) — (2,4) должно удовлетворять аналогичному неравенству, которое отнюдь не является формальным, т. е. его нельзя удовлетворить каким-либо математическим приемом рассмотрения, а оно накладывает ограничение на область применимости уравнений (2,1) — (2,4).

Все величины в (2,1)—(2,4) имеют наглядный физический смысл. Складывая уравнения энергий (2,3), (2,4) и (2,9), получаем:

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(c_v\overline{T}+\tau+\frac{1}{2}\overline{c}^2\right)=-\operatorname{div}\left(\vec{j}+\vec{J}+\vec{I}\right)+$$
$$+\bar{\rho}\left(\vec{\bar{c}},\vec{F}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_i\left(\overline{P}_{ik}+K_{ik}\right)\right]+\Psi. \qquad (2,11)$$

Слева здесь стоит изменение в единицу времени в элементарном объеме, движущемся со скоростью $\vec{\bar{c}}$ (и отнесенное к единице объема) полной энергии, состоящей из трех частей: $c_v\overline{T}$ — тепловой, τ—турбулентной и $^1/_2\,\overline{c}^2$ — кинетической энергии осредненного движения. Оно равно энергии, втекающей в объем от полного потока энергии, состоящего из трех частей: $\vec{\bar{j}}$, $\vec{J}$ — плотностей потока тепла от молекулярной теплопроводности и от конвективного переноса турбулентными пульсациями и $\vec{I}$ — плотности потока турбулентной энергии. Второй и третий члены справа в (2,11) — это работа объемных и поверхностных сил, а последний — это работа дополнительных поверхностных сил от турбулентных пульсаций на границах элементарного объема. Существование трех обособленных энергетических полей $c_v\overline{T}$, τ и $^1/_2\,\overline{c}^2$ есть фундаментальный факт, отмеченный О. Рейнольдсом в его концепции на сущность турбулентного движения: турбулентное движение есть второй вид относительного — случайного движения материи (первый—тепловое). Это обособленное существование обеспечивается выполнением упомянутых выше условий, аналогичных неравенству (2,10), что имеет место при развитой турбулентности.

Q — это диссипируемая в тепло турбулентная энергия; $k\Phi_1-\overline{p}\overline{\theta}$ — это диссипируемая в тепло, а — $K_{ik}\partial\overline{u}_i/\partial x_k$ — в турбулентную энергию энергия осредненного движения.

Для построения замкнутой системы применим способ уравнений состояния, введенный автором ранее ([2]).

§ 3. Все величины, входящие в (2,1)—(2,4), разбиваем на 2 группы: основные 6 (количество, равное числу фундаментальных уравнений):

$$\overline{u}_i,\ \overline{p},\ \overline{T},\ \tau \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (3,1)$$

и остальные

$$K_{ik},\ \vec{J},\ \vec{I},\ Q,\ \Psi \qquad (3,2)$$

„приводимые величины“, которые выражаются через (3,1) некоторыми функциональными соотношениями (§ 1 статьи ([2])), которые мы называем динамическими уравнениями состояния. В основе этого метода лежит принцип большого значения и общности — „принцип феноменологического детерминизма“, который утверждает существование того, что уместно назвать решением „физической краевой задачи“, т. е. задачи отождествления, изготовления и умения воспроизвести определенные физические состояния (процессы), и математическим оформлением которой обычно является некоторая смешанная задача для уравнений с частными производными. Этот принцип и схему построения, общую для всех физических феноменологических теорий, мы применяем к теории турбулентности, опираясь на приведенную выше (§ 2) концепцию О. Рейнольдса.

§ 4. Пренебрегая членами $\overrightarrow{O_{\bar{c}}}$, $O_{\bar{\rho}}$, $O_{\bar{T}}$, O_{τ}, $O_{\bar{p}}$, получаем уравнения состояния в виде:

$$K_{ik}=\Pi\delta_{ik}-K(\tau)\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\bar{\theta}\delta_{ik}\right), \qquad (4,1)$$

$$\Pi=\frac{2}{-}\bar{\rho}\tau, \qquad (4,2)$$

$$\vec{J}=-P(\tau)\nabla\bar{T}, \qquad (4,3)$$

$$\vec{I}=-L(\tau)\nabla\tau, \qquad (4,4)$$

$$Q=Q(\tau), \qquad (4,5)$$

$$\Psi=\tau(\beta_1\Delta\tau+\beta_2\Delta\bar{p}+\beta_3\Delta\bar{T}). \qquad (4,6)$$

Турбулентное давление Π связано с „турбулентной температурой“ τ соотношением (4,2), подобным уравнению Клапейрона. Коэффициенты K, L, P, Q, вообще говоря, зависят от всех „внутренних“ инвариантов, образованных из (3,1) и производных от них, но τ среди них есть главный, и при $\tau\to 0$ они исчезают, поэтому, в первом приближении (см. § 5 статьи ([3])), можно принять:

$$K=\alpha_1\tau, \qquad L=\alpha_2\tau, \qquad P=\alpha_3\tau, \qquad Q=g\tau, \qquad (4,7)$$

где α_1, α_2, α_3, g — размерные постоянные теории, значения которых надо взять из опыта. Также β_1, β_2, β_3 — постоянные; весь член Ψ — поправочный.

§ 5. Подставляя уравнения состояния (4,1) — (4,7) в фундаментальные уравнения (2,1) — (2,4), получаем замкнутую систему из шести уравнений для отыскания шести основных величин (3,1). Для замкнутости теории остается формулировать граничные условия. Для $\vec{\bar{c}}$, $\bar{p}$ и $\bar{T}$ они — как в обычной „ламинарной“ теории § 1, а для τ на границе турбулентного потока

$$\tau|_{\text{гр}}=0, \qquad (5,1)$$

$$\tau|_{\text{гр}}=\tau_s, \qquad (5,2)$$

где τ_s — заданная величина. Условие (5,1) имеет место для гладких стенок, (5,2) — для шероховатых; во втором случае возможны и другие формы краевых условий, а именно задание I_n введением „коэффициента внешней турбулепроводности“, аналогичное закону Ньютона теплоотдачи.

Построенная замкнутая теория охватывает аэродинамику высоких скоростей и явления турбулентного теплообмена; ее уравнения (2,1) — (2,5), (4,1) — (4,6) содержат уравнения (1,1) — (1,6) как частный случай, переходя в них при

$$\tau=0. \qquad (5,3)$$

Равенство (5,3) для всего потока является определением „ламинарного режима“, когда имеют силу уравнения (1,1) — (1,6). При $\bar{\rho}$ = const и $\bar{T}$=const уравнения (2,1) — (2,4), (4,1) — (4,6) переходят в уравнения автора ([2]) (4,1) — (4,3).

Ленинградский государ
университет

Поступило
7 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Reynolds, Phil. Trans., A (1895). [2] V. Nevzgljadov, J. of Physics, 9, 235 (1945). [3] В. Невзглядов, ДАН, 55, 107 (1947).