Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

АЭРОДИНАМИКА

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

ВЛИЯНИЕ КОНЦЕВЫХ КРОМОК ПРИ ДВИЖЕНИИ КРЫЛА СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 29 IV 1947)

Рассмотрим линеализированную задачу в обычной постановке ([1-3]) о вибрациях тонкого деформируемого крыла конечного размаха, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Потенциал скорости φ_1, обусловленный вибрациями, в любой точке крыла в осях координат $x_1 y_1 z_1$, перемещающихся прямолинейно поступательно с основной скоростью крыла u, представляется в виде формулы (6) работы ([4]).

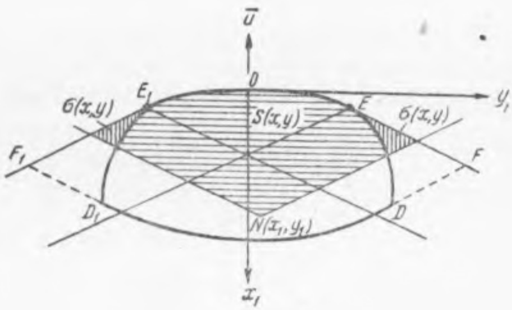

Рис. 1

Рассмотрим крыло, передняя кромка которого задана уравнением $x_1 = \psi(y_1)$, а задняя — уравнением $x_1 = \chi(y_1)$. Функция $\chi(y_1)$ на задней кромке удовлетворяет условию $|d\chi(y_1)/dy_1| \leqslant \operatorname{ctg}\alpha$, где α — угол Маха. При этом предположено, что нормальная скорость, обусловленная вибрациями, на крыле задана в виде $v_n = \partial\varphi_1/\partial z_1 = \operatorname{Re} A_1(x_1 y_1) e^{i\omega t}$, где функция $A_1(x_1, y_1)$ определяет форму колебаний.

Для того чтобы по формуле (6) вычислить потенциал φ_1 в любой точке такого крыла, необходимо найти значения нормальной скорости $\partial\varphi_1/\partial z_1$ в области EDF и $E_1 D_1 F_1$ (рис. 1). Перейдем к координатам xyz

$$\begin{aligned} x &= x_1 - x_{10} - \sqrt{u^2/a^2 - 1}\,(y_1 - y_{10}), \\ y &= x_1 - x_{10} + \sqrt{u^2/a^2 - 1}\,(y_1 - y_{10}), \\ z &= \sqrt{u^2/a^2 - 1}\, z_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Начало координат помещено в точку $E(x_{10}, y_{10})$, лежащую на передней кромке. Точка E определена тем, что влево от нее на передней кромке выполняется условие $|d\psi(y_1)/dy_1| \leqslant \operatorname{ctg}\alpha$; вправо от нее это условие нарушено. Формула (6) преобразуется к виду*

$$\varphi = \frac{-e^{-\frac{\beta}{2}(x+y)}}{2\pi} \iint\limits_{S(x,y)} \frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0} e^{-\frac{\beta}{2}(\xi+\eta)} \cos\left[\lambda\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}\right]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}\, d\eta\, d\xi, \tag{2}$$

* Во всех формулах следует подразумевать действительную часть.

где $\beta=-\frac{i\omega u}{u^2-a^2}$, $\lambda=\frac{\omega a}{u^2-a^2}$, a — скорость звука в неподвижном газе.

Потенциал скорости в любой точке $N(x, y)$ крыла представляется в виде

$$\varphi=\frac{-e^{\frac{\beta}{2}(x+y)}}{2\pi}\iint\limits_{s(x,y)}\frac{A(\xi,\eta)\cos[\lambda\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}d\eta\, d\xi-$$

$$-\frac{e^{\frac{\beta}{2}(x+y)}}{2\pi}\iint\limits_{\sigma(x,y)}\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0} e^{-\frac{\beta}{2}(\xi+\eta)}\cos[\lambda\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}d\eta\, d\xi, \tag{3}$$

где заданная на крыле функция

$$A(x, y)=e^{-\frac{\beta}{2}(x+y)}A_1\left[\frac{x+y}{2}+x_{10};\ \frac{y-x}{2\sqrt{u^2/a^2-1}}+y_{10}\right]\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{u^2/a^2-1}}=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial z}e^{-\frac{\beta}{2}(x+y)}. \tag{4}$$

Представляя для точки $M(x,y)$, лежащей в области EDF, потенциал скорости φ, равный нулю в EDF и $E_1D_1F_1$, в виде (2), придем к интегральному уравнению, которому удовлетворяет $\partial\varphi/\partial z$:

$$\iint\limits_{\sigma(x,y)}\frac{\Theta(\xi,\eta)\cos[\lambda\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}\ d\eta\ d\xi=f(x,y), \tag{5}$$

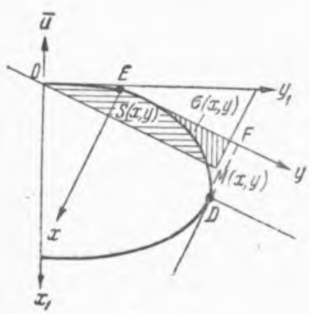

Рис. 2

где через $\Theta(x, y)$ обозначены значения $\frac{\partial\varphi}{\partial z}e^{-\frac{\beta}{2}(x+y)}$ в области EDF (соответственно $E_1D_1F_1$). Переменные интегрирования в области $\sigma(x,y)$ изменяются в пределах $0\leqslant\xi\leqslant x$, $\psi(\xi)\leqslant\eta\leqslant y$, где $y=\psi(x)$ — уравнение дуги ED концевой кромки в преобразованных координатах. Известная функция $f(x, y)$ определена в виде

$$f(x, y)=$$

$$=-\iint\limits_{s(x,y)}\frac{A(\xi,\eta)\cos[\lambda\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}]}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}d\eta\ d\xi. \tag{6}$$

Области $s(x, y)$, а также $\sigma(x, y)$ указаны на рис. 2.

Рассмотрим установившееся движение тонкого, произвольно изогнутого крыла. В этом случае во всех выражениях следует положить $\omega=0$ и в условии (4) на крыле вместо A_1 положить $-u\beta_0$, где β_0 — угол атаки элементов крыла.

Полагая в (5) $\lambda=0$, и сводя полученное уравнение дважды к уравнению Абеля, имея в виду условие на границе $f(0, y)=0$, получим решение в виде

$$\Theta(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}}\int\limits_0^x\frac{f_\xi[\xi,\psi(x)]}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi+\right.$$

$$+\int\limits_0^x \int\limits_{\psi(x)}^y \frac{f_{\xi n}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta\, d\xi \Bigg\}. \tag{7}$$

Нормальная скорость на дуге ED обращается в бесконечность как $R^{-1/2}$, где R — расстояние $M(x, y)$ до дуги ED.

Будем теперь предполагать, что конусы Маха с вершинами в точках E и E_1 пересекают переднюю кромку крыла как указано на рис. 3. В областях (I) и (I') нормальная скорость определена решением (7). На основе этого решения потенциал скорости φ может быть вычислен по формуле (3) на крыле в области (S_1), лежащей вне конусов Маха с вершинами в точках D и D_1 концевой кромки.

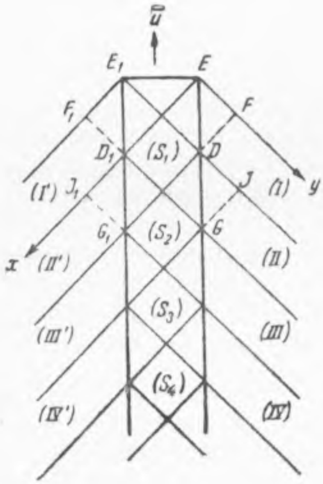

Рис. 3

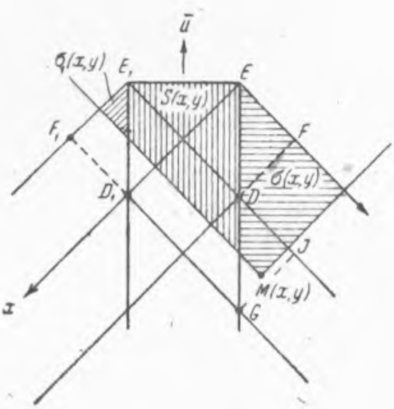

Рис. 4

Для того чтобы вычислить потенциал на крыле в области (S_2), лежащей внутри конусов Маха с вершинами в точках D и D_1 и вне конусов с вершинами в G и G_1, необходимо найти $\partial\varphi/\partial z$ в области DGI (соответственно в $D_1G_1I_1$).

Выразим для точки $M(x, y)$, принадлежащей DGI, потенциал φ, равный нулю всюду в областях (I), (II), (III), ... (соответственно в (I'), (II'), (III'), ...) по формуле (2), разбив область интегрирования на три части, как указано на рис. 4: $\Sigma = s + \sigma_1 + \sigma$.

В области $s(x, y)$ на крыле функция $\partial\varphi/\partial z = A(x, y)$ задана. В области $\sigma_1(x, y)$ функция $\partial\varphi/\partial z = \Theta(x, y)$ определена решением (7). В области $\sigma(x, y)$ обозначим $\partial\varphi/\partial z$ через $\Theta_1(x, y)$. Тогда придем к интегральному уравнению, которому удовлетворяет $\Theta_1(x, y)$:

$$\iint\limits_{\sigma(x,y)} \frac{\Theta_1(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta\, d\xi = \Phi(x, y). \tag{8}$$

Переменные интегрирования в области $\sigma(x, y)$ изменяются в пределах $0 \leqslant \xi \leqslant x$, $\psi(\xi) \leqslant \eta \leqslant y$. Известная функция $\Phi(x, y) = f(x, y) + f_1(x, y)$, где

$$f = -\iint\limits_{s(x,y)} \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta\, d\xi,$$

$$f_1 = -\iint\limits_{\sigma_1(x,y)} \frac{\Theta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} d\eta\, d\xi. \tag{9}$$

Уравнение (8) отличается от уравнения, к которому приводится (5) при $\lambda=0$, только видом известной функции. Принимая во внимание условие на границе $\Phi(0, y)=0$, решение уравнения (8) получим, пользуясь решением (7) как готовой формулой, если в последней вместо $f(x, y)$ положить $\Phi(x, y)$.

Замечая, что в области $\sigma(x, y)$ функция f_1, а следовательно, $f_{1\xi}$ и $f_{1\xi\eta}$ тождественно обращаются в нуль при $0 \leqslant x \leqslant l_1$, где, l_1 — расстояние между образующими конусов Маха с вершинами в точках D и G, решение (8) получим в виде

$$\Theta_1(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}}\int_0^x \frac{f_\xi[\xi, \psi(x)]}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi+\int_0^x\int_{\psi(x)}^y \frac{f_{\xi\eta}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}\,d\eta\,d\xi\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{y-\psi(x)}}\int_{l_1}^x \frac{f_{1\xi}[\xi, \psi(x)]}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi+\int_{l_1}^x\int_{\psi(x)}^y \frac{f_{1\xi\eta}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}\,d\eta\,d\xi\right\}. \quad (10)$$

Первое слагаемое совпадает с решением (7). Второе слагаемое учитывает влияние на точку $M(x, y)$ противоположного конца E_1D_1 крыла.

Рассуждая таким образом, найдем значения $\partial\varphi/\partial z$ в полосах (III) и (III'), (IV) и (IV'), ... Так, например, в точках, принадлежащих полосе (III), нормальная производная $\partial\varphi/\partial z=\Theta_2(x, y)$ найдется по формуле (10), если в ней в выражении (9) для f_1 вместо $\Theta(x, y)$ положить $\Theta_1(x, y)$, и т. д.

Следовательно, потенциал скорости φ можно вычислить по формуле (3) всюду на крыле в областях (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) и т. д.

Рисунки 3 и 4 даны для прямоугольного крыла лишь для простоты. Задача решена для любого вида концевых кромок ED и E_1D_1 крыла. В частности, для прямоугольного крыла с произвольным отношением сторон в решениях (7) и (10) следует положить $\psi(x)=x$, $l_1=\sqrt{2}L$, где L — полуразмах.

Заметим, что решения (7) и (10) справедливы и в тех случаях, когда концевая кромка ED крыла определена не одним уравнением $y=\psi(x)$, а состоит из отрезков кривых, заданных уравнениями $y=\psi_k(x)$, где $k=1, 2, \ldots, n$.

Указанный способ определения нормальных составляющих скорости может быть обобщен и для случая вибраций крыла. В самом деле, интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции $\frac{\partial\varphi}{\partial z}e^{-\frac{\beta}{2}(x+y)}$ в областях (I), (II), (III), ... имеют вид (5) и отличаются друг от друга только видом функции, стоящей в правой части. Эта функция определяется аналогично случаю установившегося движения и зависит в области с номером N от решения интегрального уравнения в области с номером $N-1$.

Обращение интегрального уравнения (5) мы дадим в следующей заметке.

Поступило
29 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Теория плоских движений идеальной жидкости, М., 1939 [2] Н. Е. Кочин, Прикл. мат. и мех., 6, 4 (1942). [3] Е. А. Красильщикова, Прикл. мат. и мех., 11, № 1 (1947). [4] Она же, ДАН, 56, № 6 (1947).