Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МЕХАНИКА

Ю. Д. СОКОЛОВ

О ТРАЕКТОРИЯХ НЕОГРАНИЧЕННОГО УДАЛЕНИЯ ТРЕХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗАИМНЫХ СИЛ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 V 1947)

Пусть три материальные точки P_0, P_1, P_2 с массами m_0, m_1, m_2 взаимно отталкиваются (при $f(r_k) > 0$) или притягиваются (при $f(r_k) < 0$) с силами, равными

$$m_i m_j |f(r_k)| \quad (i, j, k = 0, 1, 2; \quad i \neq j \neq k), \tag{1}$$

где $r_k = \overline{P_i P_j}$, а $f(r) = dF(r)/dr$ — функция действительная и аналитическая при всяком действительном, положительном значении r, конечная и непрерывная при $r=0$ и такая, что:

$$\lim_{r \to +\infty} r^{1-2\alpha} f(r) = 2\alpha \quad \left(\lim_{r \to +\infty} r^{-2\alpha} F(r) = 1, \quad \alpha > \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

Обозначив через I^2 момент инерции системы относительно центра масс и через h — постоянную интеграла энергии, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I^2}{dt^2} = \sum m_i m_j \left[2F(r_k) + r_k f(r_k)\right] + 2h, \tag{3}$$

из которого заключим, что, если движение системы происходит регулярно при $0 \leqslant t < t_1$, а в момент t_1 перестает быть таким, то при $t \to t_1$ I^2 стремится к определенному пределу или неограниченно возрастает. В последнем случае, который в дальнейшем и рассматривается, в некотором интервале (t_0, t_1) I^2 возрастает монотонно. Обозначим через x_i и ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ координаты точек P_1 и P_2 в двух системах соответственно параллельных координатных осей, первая из которых имеет начало в точке P_0, а вторая — в центре инерции масс m_0 и m_1, и положим:

$$I^{2\alpha} \sum m_i m_j F(r_k) = V, \quad I^{\alpha-1}(\mu_1 r_2 r_2' + \mu_2 \rho\rho') = I^{\alpha} \frac{dI}{dt} R,$$

$$\begin{gathered} I^{-2\alpha}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{I^2}(r_2\rho' - \rho r_2')^2 + \frac{\mu_1}{r_2^2}\sum (x_i x_j' - x_j x_i')^2 + \right. \\ \left. + \frac{\mu_2}{\rho^2}\sum (\xi_i \xi_j' - \xi_j \xi_i')^2\right] = P^2, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\mu_1=\frac{m_0m_1}{m_0+m_1},\qquad \mu_2=\frac{m_2(m_0+m_1)}{M},\qquad M=m_0+m_1+m_2,$$

$$r_2=+\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\qquad \rho=+\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\,.$$

Тогда интеграл энергии примет вид:

$$R^2+P^2=2V+2hI^{-2\alpha}. \tag{5}$$

Отсюда заключаем, на основании ограниченности V при $t\to t_1$ (в чем легко убедиться), что P и $R=\frac{1}{1-\alpha}\frac{d(I^{1-\alpha})}{dt}\left(=\frac{d\ln I}{dt}\text{ при }\alpha=1\right)$ также остаются ограниченными. Следовательно, случай $\lim\limits_{t\to t_1} I^2=+\infty$ при конечном t_1 возможен только при $\alpha>1$.

Обозначив через p_m наименьшее из отношений r_i/I в момент t, a priori можем допустить три гипотезы о поведении p_m в окрестности $t=t_1$: 1) $\inf p_m>0$; 2) $\lim\limits_{t\to t_1} p_m=0$; 3) p_m неограниченно колеблется, причем $\inf p_m=0$.

В случае 2) имеем (так как одно и то же $p_i=r_i/I$, пусть p_0, стремится к нулю):

$$\lim_{t\to t_1} 2V=2V_1=2M\left[\frac{M}{m_0(m_1+m_2)}\right]^{\alpha-1}.$$

Из (4) при помощи (3) получим уравнение

$$\frac{dR^2}{dL}=-\frac{R^2}{L}+\frac{2V_1+\varepsilon}{L}\quad (L=I^{2\alpha+2},\ \varepsilon\to 0\quad\text{при}\quad L\to+\infty),$$

откуда нетрудно вывести, что при $t\to t_1$

$$\lim R^2=\lim 2V=2V_1 \tag{6}$$

и, следовательно, по (5):

$$\lim P^2=0. \tag{6'}$$

В случаях 1) и 3) рассуждения будут значительно более сложными. Однако приняв, что при достаточно больших значениях r

$$\frac{d}{dr}\left[r^{-2\alpha}F(r)\right]\geqslant 0, \tag{7}$$

в результате обобщения видоизмененного метода Зундмана, приходим к установлению выводов (6), (6') и для случаев 1), 3).

Рассматривая случай плоского движения, в результате довольно сложных рассуждений, найдем, что при условиях 1) и 2)* p_i стремится к определенным пределам при $t\to t_1$, причем могут представиться только три следующие случая:

a) $$\lim p_0=\lim p_1=\lim p_2=+\sqrt{\frac{M}{\sum m_i m_j}}\,;$$

b) $$\lim p_2=+\sqrt{\frac{M}{m_0(m_1+m_2)+2m_0m_1q+m_2(m_0+m_1)q^2}}\,,$$

$$\lim\frac{p_0}{p_2}=q,\quad \lim\frac{p_1}{p_2}=1+q,$$

* Гипотезу 3) рассмотрим в особой работе.

где q — положительный корень уравнения

$$m_0(1+q)\left[(1+q)^{2\alpha-2}-1\right]+m_1q\left(q^{2\alpha-2}-1\right)-$$
$$-m_2q(1+q)\left[(1+q)^{2\alpha-2}-q^{2\alpha-2}\right]=0; \qquad (8)$$

$$\text{c)}\quad \lim p_0=0,\quad \lim p_1=\lim p_2=+\sqrt{\frac{M}{m_0(m_1+m_2)}}.$$

При $\alpha<1$ уравнение (8) всегда имеет положительные корни * (при $\alpha\leqslant{}^1/_2$ — только один); при $\alpha>1$ уравнение (8) может иметь один или несколько положительных корней, но может и совсем не иметь таких корней. При произвольном α и $m_0=m_2$ это уравнение имеет корень $q=1$.

Уравнение (8) при $\alpha=1$ и $\alpha=2$, $m_0=m_1=m_2$ обращается в тождество **.

Введя полярные координаты (r_2, ϑ), (ρ, ω) точек P_1, P_2 и положив

$$\sqrt{\mu_1}r_2=e^z\cos y_1,\quad \sqrt{\mu_2}\rho=e^z\sin y_1\quad (e^z=I),\quad \vartheta-\omega=y_3,$$

$$\sqrt{\mu_1\mu_2}e^{-(\alpha+1)z}(r_2\rho'-\rho r_2')=e^{-(\alpha-1)z}y_1'=y_2,$$

$$\mu_1e^{-(\alpha+1)z}(x_1x_2'-x_2x_1')=\mu_1e^{-(\alpha+1)z}r_2^2\vartheta'=y_4,$$

приведем *** решение плоской задачи к интегрированию системы четырех уравнений 1-го порядка с аргументом z вида

$$\frac{dy_i}{dz}=\Phi_i(z, y_1, \ldots, y_4)\quad (i=1, 2, 3, 4), \qquad (9)$$

причем Φ_i обращаются в нуль при $z=+\infty$, $y_1=\overline{y}_1$, $y_3=\overline{y}_3$, $y_2=y_4=0$ ($\overline{y}_1=\lim\limits_{t\to t_1}y_1$, $\overline{y}_3=\lim\limits_{t\to t_1}y_3$), и к двум квадратурам, определяющим ϑ и t в функции от $z\,(I)$.

Положим, что $r^{2-2\alpha}\dfrac{df(r)}{dr}$ при $r\to\infty$ стремится к определенному пределу и что в случае 2) частные производные 1-го и 2-го порядка функции $I^{-2\alpha}F(r_0)$ по аргументам y_1, y_3 определенны и непрерывны при $z\geqslant z_0$, $y_1=\overline{y}_1$, $y_3=\overline{y}_3$.

На основании некоторого обобщения известных теорем Боля и Коттона об асимптотических решениях дифференциальных уравнений можно установить существование семейства решений уравнений движения, соответствующих траекториям неограниченного удаления материальных точек ($I^2\to+\infty$), зависящего от 6 произвольных параметров (кроме 4 постоянных интегралов движения центра инерции) в случае а) и от 7 или 8 параметров в случаях b), c). В случае c)

---

* При $\alpha>{}^1/_2$ уравнение (8) имеет также корень $q=0$.

** При $F(r)=Ar^2$ уравнения движения, как известно, интегрируются в элементарных функциях (так же как и в тривиальном случае прямолинейного движения при $F(r)=Ar$). При $F(r)=Ar^2+Br^4$ и $m_0=m_1=m_2$ уравнения прямолинейного движения интегрируются в эллиптических функциях ([1]). Это же обстоятельство имеет место и в „равнобедренном случае“ пространственного движения при $F(r)=Ar^2+Br^{-2}$.

*** Используя интеграл энергии и интеграл площадей.

существуют такие решения, что при $t \to t_1$ два взаимных расстояния (r_1, r_2) неограниченно возрастают, а третье стремится к нулю.

Нетрудно установить форму разложений искомых функций в окрестности $I = +\infty$ в случае, когда функции $r^{-2\alpha} F(r)$, $r^{1-2\alpha} f(r)$ в окрестности $r = +\infty$ представляются рядами, расположенными по целым положительным степеням величин $r^{-\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_i > 0)$.

Поступило
7 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Д. Соколов, ДАН, 46, № 3 (1945).