Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Действительный член Болгарской Академии Наук
ЛЮБОМИР Н. ЧАКАЛОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 IX 1947)

§ 1. Обозначим через (C) класс целых функций нулевой степени. Для того чтобы функция $g(z)$ принадлежала классу (C), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{r}=0,$$

где $M(r)$ — максимум модуля $|g(z)|$ на окружности $|z|=r$. Наша цель установить следующее характеристическое свойство целых функций класса (C):

Для того чтобы целая функция $g(z)$ принадлежала классу (C), необходимо и достаточно, чтобы она была представима рядом Ньютона

$$g(z)=\sum_0^\infty\frac{A_n}{n!}z(z-1)\ldots(z-n+1),\quad \textit{где}\ \lim\sqrt[n]{|A_n|}=0. \tag{1}$$

Доказательство. 1. Условие достаточно. В самом деле, равенство $\lim\sqrt[n]{|A_n|}=0$ обеспечивает сходимость ряда (1) во всей плоскости; этот ряд, следовательно, является целой функцией $g(z)$.

Введем обозначение $\binom{z}{n}$ для полинома

$\dfrac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}=\dfrac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(z-n+1)}$. Обозначая через ε любое число между 0 и 1/2 и через $N=N(\varepsilon)$ достаточно большое целое число такое, что $|A_n|<\varepsilon^n$ для $n>N$, имеем:

$$|g(z)|<\left|\sum_0^N A_n\binom{z}{n}\right|+\sum_{N+1}^\infty\varepsilon^n\frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!}<$$
$$<\left|\sum_0^N A_n\binom{z}{n}\right|+(1-\varepsilon)^{-r}<\sum_0^N c_nr^n+e^{2\varepsilon r}<Ae^{2\varepsilon r},$$

где A не зависит от $r=|z|$. Из этого следует

$$\max_{|z|=r}|g(z)|=M(r)<Ae^{2\varepsilon r},\quad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M(r)}{r}\leqslant 2\varepsilon$$

при всяком выборе $\varepsilon>0$, т. е. $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log M(r)}{r}=0$;

что показывает, что функция $g(z)$ в самом деле принадлежит классу (C).

2. Условие необходимо. Пусть $g(z)$ — некоторая целая функция, принадлежащая классу (C). Введем обозначения

$$A_0=g(0),\ A_n=\Delta^n g(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k),\quad k=1,2,3,\ldots \qquad (2)$$

Мы воспользуемся здесь менее ограничивающим предположением, что $g(z)$ удовлетворяет при больших значениях $|z|$ неравенству $|g(z)|<e^{\varepsilon|z|}$, где ε — постоянное, меньшее $\ln 2$.

Рассмотрим интеграл

$$R_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{z(z-1)\ldots(z-n)}\frac{g(z)}{(z-x)}dz,$$

взятый в положительном направлении вдоль окружности C_n с центром $z=0$ и радиусом $2n$ (здесь мы предполагаем, что $|x|<n$). На основании теоремы вычетов имеем $R_n(x)=g(x)-\sum_{k=0}^{n}A_k\binom{x}{k}$. С другой стороны,

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{n!}n^x\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(-1)^{n+1}n!}{z(z-1)\ldots(z-n)}\frac{g(z)}{z-x}n^{-x}dz$$

и первый множитель $(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{n!}n^x$ в каждой ограниченной области переменного x стремится равномерно к $\frac{1}{\Gamma(-x)}$. Что же касается другого множителя, он стремится равномерно к нулю в каждой такой области вследствие неравенств

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(-1)^{n+1}n!}{z(z-1)\ldots(z-n)}\frac{g(z)}{z-x}n^{-x}dz\right|\leqslant\frac{4\pi n}{2\pi}\,\frac{n!}{2n(2n-1)\ldots n}\,\frac{e^{2n\varepsilon}}{n}n^{\lambda}=$$

$$=\frac{2}{\binom{2n}{n}}e^{\varepsilon}n^{\lambda-1}<\frac{2(2n+1)}{2^{2n}}e^{2n\varepsilon}n^{\lambda-1}=2\left(2+\frac{1}{n}\right)n^{\lambda}e^{2n(\varepsilon-\ln 2)},$$

где λ — постоянное, зависящее от области изменения x. Таким образом, мы показали, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ для всех значений x, т. е. что ряд Ньютона $\sum_{0}^{\infty}A_n\binom{x}{n}$ всюду сходится и его сумма равна $g(x)$.

Разложение в ряд Ньютона, которое мы получили, предполагая только, что целая функция $g(z)$ удовлетворяет неравенству $|g(z)|<e^{\varepsilon|z|}$ при некотором значении ε, меньшем $\ln 2$, единственно.

Легко установить более сильное утверждение, что если ряд $\sum_{0}^{\infty}B_n\binom{z}{n}$ сходится к $g(z)$ в некоторой полуплоскости, содержащей точку $z=0$, его коэффициенты B_n совпадают с коэффициентами A_n, определенными при помощи (2), и ряд сходится во всей плоскости.

Нам остается показать, что $\lim\sqrt[n]{|A_n|}=0$ в том случае, когда $g(z)$ принадлежит классу (C).

Пусть ε — любое положительное число и $\rho=\rho(\varepsilon)$ — некоторое положительное число, выбранное так, что $|g(z)|<e^{\varepsilon|z|}$ при $|z|>\rho$. Коэффициент A_n выражается при помощи интеграла

$$A_n=\Delta^n g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{n!\,g(z)\,dz}{z(z-1)\ldots(z-n)},$$

причем интегрирование выполняется в положительном направлении вдоль окружности C с центром 0 и радиусом $R>n$. Отсюда выводим, предполагая, что $n>\rho$,

$$|A_n|\leqslant\frac{2\pi R}{2\pi}\,\frac{e^{\varepsilon R}n!}{R(R-1)\ldots(R-n)}<\frac{e^{\varepsilon R}n^n}{(R-n)^n},$$

или, выбирая $R=n+\frac{n}{\varepsilon}$,

$$|A_n|<\frac{e^{n(1+\varepsilon)}n^n}{(n/\varepsilon)^n}=(\varepsilon e^{1+\varepsilon})^n,$$

$$\sqrt[n]{|A_n|}<\varepsilon e^{1+\varepsilon},\quad \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}\leqslant\varepsilon e^{1+\varepsilon}.$$

С другой стороны, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$ не зависит от выбора $\varepsilon>0$, которое можно сделать произвольно малым; итак, $\lim\sqrt[n]{|A_n|}=0$, что и требовалось доказать.

§ 2. В качестве приложения доказанной теоремы мы дадим новое доказательство одной классической теоремы Wigert'а, которое нам кажется весьма естественным. Речь идет о следующей теореме:

Для того чтобы ряд $\sum\limits_1^n c_n z^n$ был целой функцией от $\frac{1}{1-z}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $g(z)$ класса (C), что $g(n)=c_n$ для $n=1,2,3,\ldots$

В самом деле, если функция $f(z)=\sum\limits_1^\infty c_n z^n$ является целой функцией от $\frac{1}{1-z}$, ее можно представить рядом следующего вида:

$$f(z)=\sum_0^\infty A_k(1-z)^{-k},\quad \text{где}\lim\sqrt[k+1]{|A_k|}=0.$$

При $n=1,2,3,\ldots$ имеем

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\sum_{k=1}^\infty A_k\binom{k+n-1}{n}=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}A_k\binom{-n-1}{k-1}. \tag{3}$$

С другой стороны, на основании нашей теоремы функция $h(z)=\sum\limits_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}A_k\binom{z}{k-1}$ является целой функцией класса (C) и, следовательно, то же можно утверждать и на счет функции $g(z)=h(-z-1)$, которая, очевидно, удовлетворяет соотношениям $g(n)=c_n$ для $n=1,2,3,\ldots$

Обратно, если целая функция $g(z)$ принадлежит классу (C), к тому же классу принадлежит функция $h(z)=g(-z-1)$, которая, следовательно, может быть представлена рядом Ньютона

$$h(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}A_k\binom{z}{k-1},\ \text{где}\ \lim\sqrt[k+1]{|A_k|}=0.$$

Итак, функция $f(z)=A_0+\sum_1^{\infty}A_k(1-z)^{-k}$, где $A_0=-\sum_1^{\infty}A_k$, является целой функцией от $\frac{1}{1-z}$, разлагаемой в ряд Маклорена $f(z)=\sum_1^{\infty}c_n z^n$, коэффициенты которого выражаются при помощи формул (3), что доказывает, что ряд $\sum_1^{\infty}g(n)\,z^n$ является целой функцией от $\frac{1}{1-z}$.

Заметим, наконец, что функция $g(z)$ класса (C), о которой идет речь в теореме Wigert'a, определена однозначно. В самом деле, две функции этого класса, которые совпадают при $n=1, 2, 3, \ldots$, совпадают тождественно, как это видно из замечания, которое мы сделали выше в связи с однозначностью разложения в ряд Ньютона.

Поступило
10 IX 1947