Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Ф. ЛАПТЕВ

АФФИННОЕ ИЗГИБАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ С СОХРАНЕНИЕМ ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 19 IV 1947)

1. В настоящем сообщении вводится понятие изгибания точечного многообразия в пространстве аффинной связности с точки зрения неизменности комплекса внутренних геометрий ([2]). Это изгибание оказывается совпадающим с изгибанием второго порядка в смысле Картана ([1]), если объемлющее пространство является аффинным. Для этого случая в работе указываются условия изгибаемости многообразия в зависимости от его типа и числа измерений.

2. Пусть в N-мерном пространстве аффинной связности, отнесенной к произвольной системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$, определено n-мерное многообразие (n-мерная поверхность) S_n при помощи системы параметрических уравнений

$$x^J = x^J(u^1, \ldots, u^n) \quad (J = 1, 2, \ldots, N). \tag{1}$$

С текущей точкой $M(u)$ этой поверхности S_n свяжем подвижной репер $(\vec{M}; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}, \ldots, \vec{e}_N)$ первого порядка, n первых векторов которого $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ располагаются в касательной плоскости к S_n в точке M. Инфинитезимальное перемещение этого репера будет определено уравнениями вида

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{dM} = \vartheta^k \vec{e}_k, \quad \vartheta^\alpha = 0, \\
\overrightarrow{de_k} = \vartheta_k^i \vec{e}_i + \vartheta_k^\alpha \vec{e}_\alpha, \\
\overrightarrow{de_\alpha} = \vartheta_\alpha^i \vec{e}_i + \vartheta_\alpha^\beta \vec{e}_\beta \\
(i, k = 1, \ldots, n; \quad \alpha, \beta = n+1, \ldots, N).
\end{gathered} \tag{2}$$

Проектируя на касательную плоскость $(\vec{M}; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ образ бесконечно близкой касательной плоскости $(\vec{M} + \overrightarrow{dM}, \; \vec{e} + \overrightarrow{de}_1, \ldots, \vec{e}_n + \overrightarrow{de}_n)$ параллельно различным $N-n$-мерным нормалям, мы определим на поверхности S_n комплекс внутренних n-мерных геометрий аффинной связности ([2]). Все эти n-мерные геометрии будут определяться с точностью до эквивалентности следующими формами:

$$\vartheta^i, \qquad \vartheta_k^i + a_\alpha^i \vartheta_k^\alpha, \tag{3}$$

где a_α^i — произвольные функции параметров $u^1, \ldots, u^n$.

3. Определение. Две n-мерных поверхности S_n и $\tilde{S}_n$ будем называть наложимыми друг на друга, если между ними можно

установить такое взаимно-однозначное точечное соответствие, при котором совпадают связанные с этими поверхностями комплексы внутренних геометрий, определенных путем проектирования.

Необходимым и достаточным условием наложимости двух n-мерных поверхностей S_n и $\tilde{S}_n$ друг на друга является следующее условие. Для произвольно заданного подвижного репера первого порядка $(\vartheta^k, \vartheta^J_k, \vartheta^J_\alpha)$ поверхности S_n должен существовать подвижной репер первого порядка $(\tilde{\vartheta}^k, \tilde{\vartheta}^J_k, \tilde{\vartheta}^J_\alpha)$ поверхности $\tilde{S}_n$, для которого удовлетворяется следующая система дифференциальных уравнений

$$\tilde{\vartheta}^k = \vartheta^k, \qquad \tilde{\vartheta}^J_k = \vartheta^J_k, \tag{4}$$

где независимыми переменными являются n параметров, к которым отнесена поверхность S_n.

Ниже мы ограничимся рассмотрением изгибания n-мерной поверхности S_n, находящейся в N-мерном аффинном пространстве. В этом случае определенное выше изгибание с сохранением внутренних геометрий совпадает с изгибанием второго порядка в смысле Картана, которое определяется так: две n-мерные поверхности S_n и $\tilde{S}_n$ N-мерного аффинного пространства называются наложимыми, если между ними можно установить такое взаимно-однозначное точечное соответствие, что для любой пары соответствующих точек M из S_n и $\tilde{M}$ из $\tilde{S}_n$ будет существовать аффинное преобразование, которое преобразует точку $\tilde{M}$ в точку M, а поверхность $\tilde{S}_n$ в поверхность $\tilde{\tilde{S}}_n$, имеющую с поверхностью S_n касание второго порядка в точке M.

4. Исследование совместимости системы дифференциальных уравнений изгибания (4) связано со структурой следующей матрицы, составленной из пфаффовых форм:

$$\begin{Vmatrix} \vartheta_1^{n+1}, & \vartheta_1^{n+2}, & \ldots, & \vartheta_1^N \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \vartheta_n^{n+1}, & \vartheta_n^{n+2}, & \ldots, & \vartheta_n^N \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Горизонтальным рангом этой матрицы назовем наибольшее число ρ ее линейно независимых столбцов, вертикальным рангом — наибольшее число $\mathfrak{r}$ ее линейно независимых строк.

Эти ранги ρ и $\mathfrak{r}$ являются инвариантами относительно любых аффинных преобразований подвижного репера первого порядка. Они связаны между собой, а также с числом измерений n поверхности S_n и с числом измерений N объемлющего пространства следующими неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \mathfrak{r} \leqslant n, \\ 0 \leqslant \rho \leqslant N-n, \\ \rho \leqslant \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}+1)}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для неособых точек неспециальных поверхностей вертикальный ранг $\mathfrak{r}$ равен n, а горизонтальный ранг ρ равен наименьшему из чисел $\frac{n(n+1)}{2}$ и $N-n$.

Поверхность n измерений с горизонтальным рангом $\mathfrak{r}$ характеризуется тем, что она в каждой своей точке обладает $(n+\rho)$-мерной соприкасающейся плоскостью, т. е. плоскостью, которая содержит не только $d\vec{M}$, но и $d_2\vec{M}$.

Поверхность n измерений с вертикальным рангом $\mathfrak{r}$ характеризуется тем свойством, что через каждую ее точку проходит $(n-\mathfrak{r})$-мерная плоская образующая, причем во всех точках одной и той же образующей касательная плоскость к поверхности одна и та же.

5. Применение теории Картана совместности пфаффовых систем к дифференциальным уравнениям изгибания (4) приводит к следующим результатам.

Теорема 1. *n-мерная поверхность S_n в N-мерном аффинном пространстве изгибаема, если*

$$N \geqslant \frac{n^2+3n-2}{2} \tag{7}$$

и если горизонтальный ранг ρ матрицы (5) *не меньше чем* $\frac{n^2+n-2}{2}$.

При этом следует различить два случая:

1) если $N > \frac{n^2+3n-2}{2}$, *то любые две поверхности наложимы друг на друга;*

2) *если* $N = \frac{n^2+3n-2}{2}$, *то поверхность, налагающаяся на данную поверхность S_n, и точечное соответствие между ними определяется n^2+3n-2 произвольными функциями от $n-1$ аргументов.*

Таким образом, двумерная поверхность, вообще говоря, изгибается в четырехмерном пространстве.

Теорема 2. *n-мерная поверхность с вертикальным рангом $\mathfrak{r}$ матрицы* (5) *в N-мерном аффинном пространстве изгибается, если*

$$N \geqslant n + \frac{\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}}{2} \tag{8}$$

и если горизонтальный ранг ρ матрицы (5) *не меньше чем* $\frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}+1)}{2}$.

При этом в случае $N = n + \frac{\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}}{2}$ поверхность, налагающаяся на данную поверхность S_n, и точечное соответствие между ними определяется $n + \frac{\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}}{2}$ произвольными функциями от $\mathfrak{r}$ аргументов.

В заключение отметим, что введенное определение изгибания с сохранением внутренних геометрий поверхности может быть распространено и на многообразия в пространствах с другими фундаментальными группами (например в проективном пространстве), если только надлежащим образом определить комплекс внутренних геометрий, связанных с многообразием.

Поступило
19 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, C. R. Conges Strasbourg, p. 397, 1920. [2] Г. Ф. Лаптев, ДАН, **41**, № 8 (1943).