Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Мы говорим, что к функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ применим предельный закон (B) (или предельная формула (B), если при всех $p > 0$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\ \frac{n}{p \pm 0}\right) = A_{p \pm 0} f(x). \tag{B}$$

В заметке ([1]) (теорема 7, стр. 481) я доказал, что закон (B) применим ко всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$|f(x)| < H(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

где $H(x) = \sum_{0}^{\infty} a_k x^{2k}$ — целая функция* нулевого рода.

Напомню, что, как показано в той же заметке, при соблюдении условия (1) целая функция $g_p(x)$ степени p, осуществляющая наилучшее приближение $A_p f(x)$, существует и $A_{p+0} f(x) = A_p f(x)$ (если $A_p f(x) < \infty$). Кроме того, из теоремы 6 заметки ([1]) следует, что для всех функций $f(x)$ с $A_p f(x) \leqslant C$ при $p \geqslant p_0$, удовлетворяющих тому же самому условию (1) (т. е. при одной и той же функции $H(x)$ в правой части (1)), предельная формула (B) имеет место равномерно, а именно, при любом данном $\varepsilon > 0$ для всех этих функций может быть указано одно и то же значение N (зависящее только от $H(x)$ и C) так, что

$$\left| E_n\left(f(x); \frac{n(1-\varepsilon)}{p}\right) - A_p f(x) \right| < e^{-n\frac{\varepsilon^{3/2}}{2}} \quad (p \geqslant p_0) \tag{2}$$

при всех $n \geqslant N$.

---

* Нетрудно видеть, что условие (1) выполняется, если, например, $\log|f(x)| < \frac{c|x|}{[\log|x|]^\alpha}$ при $\pm x \to \infty$, где $\alpha > 1$, $c > 0$. Для этого достаточно заметить, что, если $\beta_k = \frac{1}{(k+1)\,[\log(k+1)]^\alpha}$, то функция нулевого рода

$$H(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\beta_k^2}\right) > \prod_{k=1}^{n} \frac{x^2}{\beta_k^2} > \left[\frac{x}{\frac{n+3}{2}\left[\log\frac{n+3}{2}\right]^\alpha}\right]^{2n}$$

при любых x и n, и, полагая $n+3 = \frac{x}{[\log|x|]^\alpha}$ $(|x| > e)$,

$$\log H(x) > 2n \log 2 = \frac{2x\log 2}{[\log|x|]^\alpha} - 6\log 2.$$

Применимость к функции $f(x)$ закона (B), в частности, при условии (1) (благодаря лемме [1], стр. 482), не исключает случая, когда $A_p f(x)=\infty$ для $p<p_0\leqslant\infty$ и $A_p f(x)<\infty$ для $p>p_0$: если $p_0=\infty$, то $\lim\limits_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p}\right)=\infty$ при любом $p>0$, и наоборот; случай $p_0<\infty$ эквивалентен $\lim\limits_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p}\right)=\infty$ при $p<p_0$ и $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} E_n\left(f(x); \frac{n}{p}\right)<\infty$ при $p>p_0$. При отсутствии условия, аналогичного (1), закон (B) может нарушаться, но справедлива всегда

Теорема. *Если существует такое $p_0<\infty$, что $A_p f(x)<\infty$ для всех $p>p_0$, то*

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p\pm 0}\right)=A_{p\pm 0}\, f(x) \tag{B}$$

для всех $p>\gamma p_0$, где γ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+1}=\log\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2+1}\right). \tag{3}$$

Значение γ не может, в общем случае, быть снижено ($\gamma\neq 1{,}51$).

Доказательство. Пусть $g_p(x)$ будет функция степени p. Рассмотрим ее разложение [1] по многочленам Чебышева на отрезке $(-\lambda, \lambda)$:

$$g_p(x)=\sum_0^\infty A_k T_k\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad A_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_p(\lambda\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta, \tag{4}$$

и приближенный многочлен степени n

$$P_n(x)=\sum_0^\infty A_k T_k\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Как известно, каково бы ни было $p'>p$, можно указать такое число R, что при всех $|z|\geqslant R$

$$|g_p(z)|<e^{p'|z|},$$

и, так как

$$|A_k|<2\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^k M_{\lambda,\rho},$$

где $M_{\lambda,\rho}$ есть максимум $|g_p(z)|$ на любом эллипсе с фокусами $(-\lambda,\lambda)$ и полусуммой осей ρ, следовательно, если $\lambda\geqslant R$, то, обозначая через λb малую полуось,

$$|A_n|<\frac{2}{\left[b+\sqrt{b^2+1}\right]^n}\, e^{p'\lambda\sqrt{b^2+1}}.$$

Таким образом, для $n\geqslant\lambda p'c$

$$|A_n|<2\left[\frac{e^{\frac{1}{c}\sqrt{b^2+1}}}{b+\sqrt{b^2+1}}\right]^n=2e^{-n\delta}$$

и, если c настолько велико, что при соответствующем выборе b

$$\frac{1}{c}\sqrt{b^2+1}-\log\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=-\delta<0,$$

то

$$|g_p(x)-P_n(x)|<\frac{2e^{-n\delta}}{1-e^{-\delta}}.$$

Но если $b=\gamma$ определяется уравнением (3), то при $c=\frac{\gamma}{1-\alpha}$ $(\alpha>0)$ $\delta=\alpha\sqrt{\gamma^2-1}$. Следовательно,

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(g_p(x); \frac{n}{p_1}\right)=0$$

при любом $p_1>\gamma p$.

Положим теперь, что $f(x)$ — любая данная функция, для которой $A_{p'}f(x)$, имеет определенное конечное значение при всяком данном $p'>p_0$. Следовательно, существует функция $g_{p'}(x)$ такая, что $f(x)-g_{p'}(x)$ ограничена $(-\infty<x<\infty)$, а потому подчиняется закону (B); таким образом,

$$A_{p\pm 0}f(x)=A_{p\pm 0}(f(x)-g_{p'}(x))=\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x)-g_{p'}(x);\ \frac{n}{p\pm 0}\right)$$

при всяком $p>p'$. Но, с другой стороны, если $p_1>p'\gamma$ то, по выше доказанному,

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(g_{p'}(x);\ \frac{n}{p\pm 0}\right)=0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x)-g_{p'}(x);\ \frac{n}{p_1\pm 0}\right)=\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p_1\pm 0}\right);$$

откуда следует (B) при всяком $p_1>p_0\gamma$.

Остается показать, что вышеуказанное значение γ не может быть уменьшено. Для этого достаточно указать функцию, для которой равенство (B) нарушается при $p_1<p_0\gamma$.

Примером такой функции может служить $f(x)=e^{p_0x}$ (для упрощения письма положим $p_0=1$), а именно, проверим, что

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(e^x; \frac{n}{p}\right)=\infty$$

при всяком $p<\gamma$. Действительно ([2]),

$$E_n(f(x); \lambda)>\frac{1}{\sqrt{2}}A_{n+1},$$

где A_{n+1} — коэффициент при $T_{n+1}(x/\lambda)$ в рассмотренном выше разложении $f(x)$ (4). Выражая A_n при помощи коэффициентов строки Тейлора (([2]), стр. 78), находим для $f(x)=e^x$

$$A_n=2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\left[\frac{1}{n!}+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\frac{1}{(n+1)!}+\ldots+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!(n+k)!}+\ldots\right]>$$

$$>2\sum_k\left(\frac{e\lambda}{2}\right)^{n+2k}\frac{1}{2\pi k^k(n+k)^{n+k+1}}>\frac{1}{\pi(c+1)n}\left[\left(\frac{e\lambda}{2cn}\right)^c\left(\frac{e\lambda}{2n(1+c)}\right)^{1+c}\right]^n$$

каково бы ни было число $c=k/n<\infty$. Полагая $\lambda=n/p$, имеем поэтому

$$A_n>\frac{I_c^n}{\pi(c+1)n},\quad \text{где } I_c=\left(\frac{e}{2pc}\right)^c\left(\frac{e}{2p(1+c)}\right)^{1+c},$$

и замечаем, что максимум I_c, который достигается при $4p^2c(1+c)=1$, будет равен 1, если $p=\gamma$ определяется из уравнения (3). Поэтому, если $p=\frac{\gamma}{1+\alpha}$, то

$$A_n > \frac{(1+\alpha)^{(2c+1)n}}{\pi(c+1)n} > \frac{(1+\alpha)^n}{\pi n} \to \infty.$$

Условимся говорить, что к функции $f(x)$ применим закон (B'), если предельное равенство (B) осуществляется для всех достаточно больших $p>0$. Из только что доказанной теоремы следует, что закон (B') применим к функции $f(x)$, если $A_p f(x)<\infty$ для достаточно больших p.

Законы (B) и (B') соответствующим образом распространяются, если за норму функции $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ вместо $\sup|f(x)|$ принять $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^q dx$ $(q\geqslant 1)$.

Посредством аналогичных рассуждений доказывается следующая теорема, которая представляет аналог вышеупомянутой теоремы 7 ([1]).

Теорема 7^{bis}. *Если существует такая целая функция $H_0(x)$ нулевого рода, что*

$$\int\limits_{-x}^{x}|f(x)|^q dx<|H_0(x)|, \tag{5}$$

то

$$\lim_{n=\infty} C_n^{(q)}\left(f(x);\frac{n}{p\pm 0}\right)=A_{p\pm 0}^{(q)}f(x), \tag{6}$$

где $A_p^{(q)}f(x)=\text{мин}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g_p(x)|^q dx$, $g_p(x)$ — *любая функция степени* p; $C_n^{(q)}(f(x);\lambda)=\text{мин}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}|f(x)-P_n(x)|^q\,dx$, $P_n(x)$ — *многочлен степени* n.

Особого внимания заслуживает случай $q=2$, на котором мы остановимся подробнее в другой статье. Заметим, что для соблюдения условия (5) достаточно выполнение условия (1).

Поступило
9 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 54, № 6 (1946). [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.