Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 7

МАТЕМАТИКА

В. Л. ШМУЛЬЯН

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ НОРМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 III 1940)

Настоящая заметка является дальнейшим развитием недавно опубликованных (1,2) результатов, полученных автором. В первой части доказывается, что найденное ранее автором достаточное условие сильной дифференцируемости нормы является также и необходимым. Вторая часть посвящена нахождению условий равномерной дифференцируемости нормы.

I. Пусть Q обозначает произвольное множество. Тогда через $E(Q)$ мы обозначим произвольное линейное нормированное пространство (3) ограниченных функций, определенных в Q, где $\|x\| = \sup\limits_{q\in Q} |x(q)|$.

Последовательность точек $\{q_n\} \subset Q$ называется экстремальной для функции $x_0(q) \in E(Q)$, если существует

$$\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)$$

и имеет место равенство

$$\|x_0\| = |\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)|.$$

Лемма. Пусть $x_0 \in E(Q)$, $\|x_0\| = 1$ и $\{q_n\} \subset Q$ произвольная экстремальная последовательность функции $x_0(q)$. Тогда для каждого элемента $x \in E(Q)$ и любого числа $h > 0$ выполняется:

$$\begin{gathered}[x(q)\cdot x_0(q) - \lim_n x_0(q_n)\cdot \operatorname{Lim}_n x(q_n)] \lim_n x_0(q_n) \leqslant \\ \leqslant (1 - |x_0(q)|)\left(\frac{1}{h} + 2\cdot\|x\|\right) + \\ + \frac{\|x_0 + h\cdot[x\cdot\lim_n x_0(q_n) - x_0\cdot \operatorname{Lim}_n x(q_n)]\| - \|x_0\|}{h}. \end{gathered} \tag{1}$$

[Здесь под символом Lim мы понимаем предел, введенный S. Banach'ом (3).]

Доказательство. Для $x \in E(Q)$ и $h > 0$ имеет место

$$[x(q)\cdot x_0(q) - \lim_n x_0(q_n)\cdot \operatorname{Lim}_n x(q_n)] \lim_n x_0(q_n) \leqslant [x(q)\operatorname{sign} x_0(q) -$$
$$- |x_0(q)|\cdot \lim_n x_0(q_n)\cdot \operatorname{Lim}_n x(q_n)] \lim_n x_0(q_n) + \|x\|\cdot|x_0(q) - \operatorname{sign} x_0(q)| +$$

$$+\|x\|\cdot|1-|x_0(q)||=[x(q)\cdot\lim_n x_0(q_n)-x_0(q)\cdot\operatorname{Lim}_n x(q_n)]\operatorname{sign}x_0(q)+$$
$$+2\cdot\|x\|\cdot(1-|x_0(q)|)=2\cdot\|x\|(1-|x_0(q)|)+\frac{1-|x_0(q)|}{h}+$$
$$+\frac{\{x_0(q)+h\cdot[x(q)\cdot\lim_n x_0(q_n)-x_0(q)\cdot\operatorname{Lim}_n x(q_n)]\}\operatorname{sign}x_0(q)-\|x_0\|}{h}\leqslant$$
$$\leqslant(1-|x_0(q)|)\left(\frac{1}{h}+2\cdot\|x\|\right)+\frac{\|x_0+h[x\cdot\lim_n x_0(q_n)-x_0\cdot\operatorname{Lim}_n x(q_n)]\|-\|x_0\|}{h}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $x_0\in E(Q)$, $\|x_0\|=1$. *Тогда для сильной дифференцируемости нормы* $\|x\|$ *в* $E(Q)$ *в точке* x_0 *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

Для всякой экстремальной последовательности $\{q_n\}\subset Q$ *функции* $x_0(q)$ *и любого* $x(q)\in E(Q)$ $(\|x\|\leqslant1)$ *последовательность*

$$\{x(q_n)\cdot x_0(q_n)\} \tag{2}$$

сходится равномерно в единичной сфере $(\|x\|\leqslant1)$ *к пределу, не зависящему от выбора экстремальной последовательности* $\{q_n\}$.

Достаточность этого условия была доказана ранее [2]. Докажем его необходимость. Вследствие сильной дифференцируемости нормы $\|x\|$ в точке x_0 через эту точку проходит только одна гиперплоскость, опорная к сфере $\|x\|\leqslant1$ [4]. Уравнение этой гиперплоскости имеет следующий вид:

$$\lim_n x(q_n)\cdot x_0(q_n)=1, \tag{3}$$

где левая часть не зависит от выбора экстремальной последовательности $\{q_n\}$ [1]. Таким образом для доказательства теоремы 1 нам достаточно установить равномерную сходимость последовательности (2) в единичной сфере. Из одной теоремы S. Mazur'a [4] следует, что уравнение гиперплоскости, опорной к сфере $\|x\|\leqslant1$ в точке x_0, можно записать так:

$$\lim_{h\to0}\frac{\|x_0+h\cdot x\|-\|x_0\|}{h}=1. \tag{4}$$

Следовательно, благодаря (3) и (4), имеем:

$$\lim_{h\to0}\frac{\|x_0+h\cdot x\|-\|x_0\|}{h}=\lim_n x(q_n)\cdot x_0(q_n)\quad(x\in E(Q)).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{h\to0}\frac{\|x_0+h\cdot[x\cdot\lim_n x_0(q_n)-x_0\cdot\lim_n x(q_n)]\|-\|x_0\|}{h}=0.$$

Таким образом благодаря сильной дифференцируемости нормы $\|x\|$ в точке x_0 для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta_\varepsilon>0$, что для $0<|h_\varepsilon|<\delta_\varepsilon$ и всех $x\in E(Q)$ с $\|x\|\leqslant1$ выполняется соотношение

$$\frac{\|x_0+h\cdot[x\cdot\lim_n x_0(q_n)-x_0\cdot\lim_n x(q_n)]\|-\|x_0\|}{h}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $h_\varepsilon=\frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Тогда, пользуясь неравенством (1), видим, что

$$[x(q_p)\cdot x_0(q_p)-\lim_n x(q_n)\lim_n x_0(q_n)]\lim_n x_0(q_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+$$
$$+(1-|x_0(q_p)|)\cdot\left(\frac{1}{h_\varepsilon}+2\right)$$

для всех $x \in E(Q)$ с $\|x\| \leqslant 1$ и всех $p = 1, 2, \ldots$. Если p достаточно велико, то $(1-|x_0(q_p)|)\cdot\left(\frac{1}{h_\varepsilon}+2\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Для этих p и всех $x \in E(Q)$ с $\|x\| \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$|x(q_p)\cdot x_0(q_p) - \lim_n x_0(q_n)\cdot \lim_n x(q_n)| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если E — произвольное пространство Банаха, то для сильной дифференцируемости нормы $\|f\|$ в $\bar{E}$ в точке f_0, $\|f_0\| = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее:

Из $f_0(x_n) \to \|f_0\| = 1$, $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует, что $\|x_n - x_m\| \to 0$ для $n, m \to \infty$.

Аналогично можно сформулировать критерий сильной дифференцируемости нормы $\|x\|$ в E.

Из теоремы 1 легко следует, что в пространстве (C) норма $\|x\|$ нигде не является сильно дифференцируемой, хотя известно, что имеется довольно много точек, в которых норма слабо дифференцируема.

Укажем теперь некоторые случаи, когда из слабой дифференцируемости нормы следует ее сильная дифференцируемость.

Теорема 2. *Если в слабо полном пространстве Банаха E слабая сходимость совпадает с сильной, то слабая дифференцируемость нормы $\|f\|$ в некоторой точке f_0, $\|f_0\| = 1$ влечет за собой ее сильную дифференцируемость в этой же точке.*

Доказательство. Пусть $f_0(x_n) \to 1$, $\|x_n\| = 1$. Тогда существует [1] $\lim_n f(x_n)$ $(f \in \bar{E})$, и следовательно, благодаря условию теоремы $\|x_n - x_m\| \to 0$. Остается применить следствие из теоремы 1.

Следствие. В пространстве (m) слабая дифференцируемость нормы влечет за собой ее сильную дифференцируемость [4].

Теорема 3. *В пространстве (c_0) слабая дифференцируемость нормы влечет за собой ее сильную дифференцируемость.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (c_0)$, $\|x_0\| = 1$. Предположим, что $\|x\|$ слабо дифференцируема в точке x_0. Тогда [4] существует единственная гиперплоскость $f_0(x) = 1$, опорная к единичной сфере $\|x\| \leqslant 1$ в точке x_0. Так как каждый линейный функционал в (C_0) можно продолжить на все (m), сохраняя норму, только одним способом [5], то теперь ясно, что $\|x\|$ слабо дифференцируема в точке $x_0 \in (m)$. Остается воспользоваться предыдущим следствием.

Из следствия теоремы 1 (см. доказательство теоремы 10 автора [6])) вытекает, что в случае сильной дифференцируемости нормы $\|f\|$ во всех точках $\bar{E}$ расстояние произвольной точки $x' \in E$ до любого замкнутого линейного подпространства $g \subset E$ достигается.

Таким образом [см. теорему 9 автора [6]] мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. *Если в пространствах $\bar{E}$, $\bar{\bar{E}}$ нормы всюду сильно дифференцируемы, то E регулярно.*

II. Функция $\|x\|$ называется слабо равномерно дифференцируемой, если она всюду слабо дифференцируема [4], причем для каждого $x \in E$ стремление к пределу разностного отношения $\frac{\|x_0 + h\cdot x\| - \|x_0\|}{h}$ является равномерным относительно x_0 с $\|x_0\| = 1$. Если же $\|x\|$ всюду сильно дифференцируема [4] и если стремление к пределу разностного отношения $\frac{\|x_0 + h\cdot x\| - \|x_0\|}{h}$ является равномерным относительно x_0, x с

$\|x_0\|=1$, $\|x\|\leqslant 1$, то функция $\|x\|$ называется сильно равномерно дифференцируемой.

Теорема 5. *Для того чтобы функция $\|x\|$ в $E(Q)$ была слабо равномерно дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее:*

Для любого $\varepsilon>0$ и каждого $y\in E(Q)$ существует такое $\delta_{\varepsilon y}>0$, что из неравенств

$$\begin{cases} |x(q_1)|\geqslant 1-\delta_{\varepsilon,y} \\ |x(q_2)|\geqslant 1-\delta_{\varepsilon,y} \end{cases} \quad (x\in E(Q), \|x\|=1)$$

следует

$$|x(q_1)\cdot y(q_1)-x(q_2)\cdot y(q_2)|\leqslant\varepsilon.$$

Следствие. Если E — произвольное пространство Банаха, то для слабой равномерной дифференцируемости его нормы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее: для любого $\varepsilon>0$ и каждого $\in E$ найдется такое $\delta_{\varepsilon,y}>0$, что из неравенств

$$f_1(x)>1-\delta_{\varepsilon,y},\ f_2(x)>1-\delta_{\varepsilon,y}(x\in E,\ \|x\|=1,\ \|f_1\|=\|f_2\|=1)$$

следует

$$|f_1(y)-f_2(y)|<\varepsilon.$$

Аналогично можно сформулировать условие слабой равномерной дифференцируемости нормы в сопряженном пространстве.

Доказательство теоремы 5 мы опускаем, так как оно аналогично доказательству следующей теоремы:

Теорема 6. *Для того чтобы функция $\|x\|$ в $E(Q)$ была сильно равномерно дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее:*

Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_\varepsilon>0$, что из неравенств

$$|x(q_1)|\geqslant 1-\delta_\varepsilon,\ |x(q_2)|\geqslant 1-\delta_\varepsilon(x\in E(Q),\ \|x\|=1) \tag{5}$$

следует

$$|x(q_1)\cdot y(q_1)-x(q_2)\cdot y(q_2)|\leqslant\varepsilon \tag{6}$$

для всех $y\in E(Q)$ с $\|y\|\leqslant 1$.

Докажем сперва необходимость. Пусть $\{q_{n,x}\}$ — произвольная экстремальная последовательность функции $x(q)\in E(Q)$, $\|x\|=1$. Так как $\|x\|$ сильно дифференцируема всюду, то по лемме имеем:

$$[y(q)\cdot x(q)-\lim_n x(q_{n,x})\lim_n y(q_{n,x})]\cdot\lim_n x(q_{n,x})\leqslant(1-|x(q)|)\cdot\left(\frac{1}{h}+2\right)+$$
$$+\frac{\|x+h\cdot[y\cdot\lim_n x(q_{n,x})-x\cdot\lim_n y(q_{n,x})]\|-\|x\|}{h}\quad(y\in E(Q),\|y\|\leqslant 1,\ h>0).$$

Так же, как и в теореме 1, получаем:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+h\cdot[y\cdot\lim_n x(q_{n,x})-x\cdot\lim_n y(q_{n,x})]\|-\|x\|}{h}=0.$$

Поэтому, вследствие условия теоремы, для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_\varepsilon'>0$, что

$$\frac{\|x+h\cdot[y\cdot\lim_n x(q_{n,x})-x\cdot\lim_n y(q_{n,x})]\|-\|x\|}{h}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\ (0<|h|\leqslant\delta_\varepsilon').$$

Положим $h_\varepsilon = \frac{\delta'_\varepsilon}{2}$ и $\delta''_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{h_\varepsilon}{1 + 2 \cdot h_\varepsilon}$. Если теперь $|x(q)| \geqslant 1 - \delta_\varepsilon$, где $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$, то

$$|y(q) \cdot x(q) - \lim_n x(q_{n,x}) \cdot \lim_n y(q_{n,x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это и доказывает, что из (5) следует (6).

Для доказательства достаточности мы воспользуемся одной леммой автора ([2]). Пусть $0 < |h| \leqslant \frac{1}{4}$ и $\{q_{n,y}\}$ — произвольная экстремальная последовательность функции $y(q) \in E(Q)$, $\|y\| = 1$. Тогда согласно только что упомянутой лемме автора существует такая система последовательностей

$$\{q_{n,y,h,x}\} \ (\|x\| \leqslant 1, \ x \in E(Q)),$$

что

$$\left| \frac{\|y + h \cdot x\| - \|y\|}{h} - \operatorname{Lim}_n x(q_{n,y}) \cdot \operatorname{sign} \lim_n y(q_{n,y}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\operatorname{Lim}_n x(q_{n,y}) \cdot \operatorname{sign} \lim_n y(q_{n,y}) - \lim_n x(q_{n,y,h,x}) \cdot \operatorname{sign} \lim_n y(q_{n,y,h,x})| \qquad (7)$$

и

$$||\lim_n y(q_{n,y,h,x})| - 1| \leqslant 2 \cdot |h|. \qquad (8)$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно показать, что правая часть неравенства (7) стремится к нулю, при $h \to 0$ равномерно относительно $x, y \in E(Q)$ с $\|y\| = 1$, $\|x\| \leqslant 1$.

Допустим противное, т. е. существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $0 < |h_p| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ найдутся $x_p, y_p \in E(Q)$, $\|x_p\| \leqslant 1$, $\|y_p\| = 1$, для которых

$$|\lim_n x_p(q_{n,y_p}) \operatorname{sign} \lim_n y_p(q_{n,y_p}) -$$

$$- \lim_n x_p(q_{n,y_p,h_p,x_p}) \operatorname{sign} \lim_n (q_{n,y_p h_p x_p})| \geqslant \varepsilon_0.$$

Возьмем теперь последовательность $\{n_p\} \to \infty$ такую, что

$$|x_p(q_{n_p y_p}) - \lim_n x_p(q_{n,y_p})| \leqslant \frac{1}{p},$$

$$|y_p(q_{n_p y_p}) - \lim_n y_p(q_{n,y_p})| \leqslant \frac{1}{p},$$

$$|x_p(q_{n_p y_p, h_p, x_p}) - \lim_n x_p(q_{n,y_p,h_p x_p})| \leqslant \frac{1}{p},$$

$$|y_p(q_{n_p y_p, h_p, x_p}) - \lim_n y_p(q_{n,y_p h_p x_p})| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Итак, при достаточно большом p имеем

$$|x_p(q_{n_p y_p}) y_p(q_{n_p y_p}) - x_p(q_{n_p y_p h_p x_p}) y_p(q_{n_p y_p h_p, x_p})| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}. \qquad (9)$$

Так как $\lim_p |y_p(q_{n_p y_p})| = 1$ и $\lim_p |y_p(q_{n_p y_p h_p x_p})| = 1$, то (9) противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие. Если E — произвольное пространство Банаха, то для сильной равномерной дифференцируемости его нормы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее:

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что из неравенств

$$f_1(x) > 1 - \delta_\varepsilon, \quad f_2(x) > 1 - \delta_\varepsilon \, (x \in E, \ \|x\| \leqslant 1, \ \|f_1\| = \|f_2\| = 1)$$

следует

$$\|f_1 - f_2\| \leqslant \varepsilon,$$

иными словами, чтобы сопряженное пространство $\overline{E}$ было равномерно выпуклым *.

Аналогично можно сформулировать условие сильной равномерной дифференцируемости нормы в сопряженном пространстве.

Так как пространства E и $\overline{E}$ регулярны только одновременно (7) и так как равномерно выпуклое пространство регулярно (8), то пространство, в котором норма сильно равномерно дифференцируема, является регулярным.

Государственный университет
Одесса

Поступило
23 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Шмульян, Матем. сб., 6(48), 1 (1939). [2] В. Л. Шмульян, ДАН, XXIV, № 7(1939). [3] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [4] S. Mazur, Studia Math., IV, 71, 128 (1933). [5] Г. Р. Лоренц, ДАН, I, № 2—3 (1935). [6] Loc. cit. (1), 84, 85. [7] Успехи матем. наук, 1, стр. 115 (1936); см. также B. I. Pettis, Bull. of Amer. Math. Soc., 44, № 6 (1938). [8] Д. П. Мильман, ДАН, XX, № 4 (1938); см. также B. I. Pettis, Duke Math. Journ., 5, № 2 (1939).

* Это предложение является усилением одного утверждения S. Mazur'a (4) (стр. 79).