Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Д. АДО

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЧЕТНОСТИ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОЙ p-ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 V 1947)

В статье автора (1) доказано, что счетная локально конечная p-группа с условием минимальности для нормальных делителей удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

В настоящей статье доказывается, что локально конечная p-группа с условием минимальности для нормальных делителей является счетной.

Лемма. *Конечное расширение несчетной абелевой p-группы не удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей.*

Пусть группа G является конечным расширением абелевой p-группы A и пусть A не является счетной.

Выберем из каждого смежного класса по A по одному элементу и пусть H — подгруппа, порождаемая этими элементами. Тогда, очевидно, $G=\{H, A\}$.

Группа A является объединением возрастающей последовательности характеристических подгрупп.

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots,$$

где A_m — подгруппа, образованная всеми элементами, порядок которых не превосходит p^m. Факторы A_i/A_{i-1} будут группы, все элементы которых имеют порядок, равный p. Если все факторы A_i/A_{i-1} $(i=2, 3, \ldots)$ конечны, то группа A, очевидно, будет не более, чем счетна. Последнее противоречит условиям леммы. Если A_n/A_{n-1} — бесконечная группа, то пусть $\overline{G}$ — факторгруппа G/A_{n-1}, а $\overline{A}_n$ и $\overline{H}$ — гомоморфные образы подгрупп A_n и H.

Рассмотрим подгруппу $\overline{G}_1=\{\overline{H}, \overline{A}_n\}$, порождаемую подгруппами $\overline{H}$ и $\overline{A}_n$. Группа $\overline{G}_1$ имеет бесконечную убывающую последовательность нормальных делителей конечного индекса.

В самом деле, в противном случае в группе $\overline{G}_1$ существует минимальный нормальный делитель $\overline{B}$ конечного индекса. $\overline{B}$ является бесконечной подгруппой (так как $\overline{G}_1$, по предположению, бесконечна) и не может иметь подгрупп конечного индекса. Последнее, однако, невозможно, так как все элементы $\overline{B}$ имеют порядок, равный p.

Следовательно, минимальный нормальный делитель конечного индекса не может существовать, и группа $\overline{G}_1$ имеет бесконечную убывающую последовательность нормальных делителей конечного индекса. Гомоморфные прообразы нормальных делителей этой последовательности в группе G образуют бесконечную убывающую последовательность, что и доказывает лемму.

Теорема. *Локально конечная p-группа G с условием минимальности для нормальных делителей является счетной.*

В работе автора ([2]) доказано, что локально конечная p-группа с условием минимальности для нормальных делителей имеет возрастающий центральный ряд.

Обозначим через N минимальный нормальный делитель конечного индекса группы G. N имеет возрастающий центральный ряд:

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_m \subset \ldots,$$

так как N является подгруппой группы G, обладающей возрастающим центральным рядом. Подгруппы $Z_1, Z_2, \ldots$ являются нормальными делителями всей группы G, так как центр является характеристической подгруппой.

Если N — абелева группа, то группа G удовлетворяет условиям леммы и имеет поэтому бесконечную убывающую последовательность нормальных делителей.

Пусть N — неабелева группа. Обозначим через F конечную подгруппу, порождаемую элементами, выбранными по одному из каждого класса смежности по подгруппе N, так что $G = \{F, N\}$.

Возможны два случая.

1°. Группа Z_2/Z_1 является несчетной. Факторгруппа $\overline{G} = G/Z_1$, очевидно, также удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей. Образуем группу $\overline{G}_1 = \left\{\overline{F}, \overline{Z}_2\right\}$, где $\overline{F}$ и $\overline{Z}_2$ — гомоморфные образы подгрупп F и Z_2 в факторгруппе $\overline{G} = G/Z_1$.

Группа $\overline{G}_1$ удовлетворяет условиям леммы и поэтому имеет бесконечную убывающую последовательность нормальных делителей. Но так как каждый элемент $\overline{Z}_2$ инвариантен в $\overline{N} = N/Z_1$, то построенная последовательность является последовательностью нормальных делителей и для всей группы $\overline{G} = \left\{F, N\right\}$. Гомоморфные прообразы подгрупп этой последовательности в группе G образуют бесконечную убывающую последовательность нормальных делителей.

2°. Группа Z_2/Z_1 является счетной. В работе автора ([1]) показано, что группа Z_2/Z_1 не может иметь элементов бесконечной высоты, а поэтому разлагается в прямое произведение циклических подгрупп на основании теоремы Прюфера (([3]), стр. 227). Группа $\overline{N} = N/Z_1$ имеет возрастающий центральный ряд $\overline{Z}_2 \subset \overline{Z}_3 \subset \ldots$ ($\overline{Z}_i = Z_i/Z_1$), причем центр $\overline{Z}_2$ группы $\overline{N}$ разлагается в прямое произведение циклических подгрупп. В силу леммы Грюна (([3]), стр. 204) существует гомоморфное отображение группы $\overline{N}$ на одну из подгрупп центра. Поэтому группа $\overline{N}$ имеет подгруппы конечного индекса. Но тогда и группа N должна иметь подгруппы конечного индекса, что противоречит определению N, так как минимальный нормальный делитель конечного индекса не может иметь подгрупп конечного индекса.

Следовательно, во всех случаях предположение о существовании несчетной локально конечной p-группы с условием минимальности для нормальных делителей приводит к противоречию.

Поступило
8 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Адо, ДАН, 54, № 6 (1946). [2] И. Адо, ДАН, 40, № 8 (1943). [3] А. Г. Курош, Теория групп, 1944.