Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

АСТРОНОМИЯ

С. А. ЖЕВАКИН

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЦЕФЕИД

(Представлено академиком А. А. Андроновым 7 V 1947)

1. Мы намерены здесь на дискретной модели звезды показать, что предположение о термонуклеарном происхождении звездной энергии (1) приводит к установлению колебаний звезды с некоторой амплитудой, не зависящей от начальных условий. Насколько нам известно, если не считать двух некорректных попыток определения амплитуды колебаний Эддингтоном (2), в литературе имеются лишь общие указания на „влияние членов второго порядка", долженствующее ограничить нарастание колебаний, получаемое при линеаризированной постановке задачи. Возможность объяснения наличия автоколебаний при помощи пульсационной теории и гипотезы термонуклеарного происхождения звездной энергии представляет серьезный косвенный довод в пользу последних. Этот довод особенно существенен в отношении красных гигантов, для которых термонуклеарный характер выделяемой энергии оспаривается.

2. Звезда обычно рассматривается как распределенная система, описываемая дифференциальными уравнениями в частных производных. Исследование таких уравнений, если речь идет о поведении звезды как колебательной системы, весьма затруднительно. Поэтому представляется целесообразным построить модель звезды со „сосредоточенными постоянными", т. е. рассматривать звезду как дискретную систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями, и на ней рассматривать процессы колебаний *.

Будем представлять себе звезду как упругий невесомый газ, окруженный растяжимой сферической оболочкой массы M; иными словами, всю массу звезды мы считаем вынесенной в оболочку, конфигурация которой определяется единственной координатой r. Поскольку для реальной звезды гравитационная энергия $U = -Kg\frac{M^2}{r}$, где g — постоянная гравитация, r — радиус звезды, K — константа порядка единицы, определяемая распределением массы M по объему звезды (для

* Степень приближения, даваемая такой моделью по отношению к реальной звезде, должна оказаться примерно того же порядка, какой мы получаем при рассмотрении звезды как распределенной системы, при последующем ограничении основным колебанием с отбрасыванием высших гармоник. Очень близко к нашей модели лежит случай «гомологичных пульсаций», рассмотренный в свое время Джинсом (3). Мы намерены в другом месте показать, что такая модель приводит к результатам, близко совпадающим с получаемыми на классических моделях (например, Эддингтона), здесь же ограничимся указанием, что условие вибрационной устойчивости модели со „сосредоточенными постоянными" оказывается тождественным с известным критерием устойчивости Джинса, полученным им при рассмотрении гомологичных пульсаций.

политропного шара Эмдена индекса n $K=\frac{3}{5-n}\Big)$, то, кроме силы газового давления p, действующего на оболочку, мы введем силу гравитации $F=-\frac{\partial U}{\partial r}=-Kg\frac{M^2}{r^2}$. Газ будем считать идеальным и давлением радиации пренебрежем; тогда $p=\frac{M}{\mu}\frac{RT}{V}=\frac{M}{\mu}\frac{RT}{{}^4/_3\,\pi r^3}$ и уравнение движения примет вид:

$$M\frac{d^2r}{dt^2}=-Kg\frac{M^2}{r^2}+p4\,\pi r^2=-Kg\frac{M^2}{r^2}+\frac{3\,MR}{\mu}\frac{T}{r}. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение генерацию энергии в звезде и потери на излучение. Для освобождаемой в 1 сек. единицей массы в результате ядерных реакций энергии ε примем:

$$\varepsilon=\varepsilon_0\,\rho e^{-\tau T^{-1/3}}, \tag{2}$$

где $\tau=3\left(\frac{\pi^2 me^4 Z_1^2 Z_2^2}{2\,\hbar^2 K}\right)^{1/3}$, ρ — плотность газа *. Примем, что перенос энергии в звезде осуществляется через лучеиспускание; для плотности потока энергии q будем иметь, как известно, $q=-\frac{4}{3}\frac{caT^3}{k_1\rho}\frac{\partial T}{\partial r}$, где c — скорость света, a — постоянная Стефана — Больцмана, k_1 — средний коэффициент поглощения Росселанда.

Продолжая построение нашей модели со „сосредоточенными постоянными", будем считать, что газ в оболочке имеет одну и ту же температуру (т. е. теплопроводность его бесконечно велика, что физически равнозначно допущению квазистационарного распределения температуры звезды во время ее колебания), и вместо $\partial T/\partial r$ будем писать T/r; потери звезды на лучеиспускание учтем выражением $L=4\pi r^2\frac{4}{3}\frac{caT^3}{k_1\rho}\frac{T}{r}=\frac{16\,\pi\,ca}{3}\frac{T^4r}{k_1\rho}$. Будем считать, что k_1 может быть представлен как

$$k_1=k_0\rho^n T^{-s}. \tag{3}$$

Согласно первому началу термодинамики, $\varepsilon M-\frac{16\,\pi ca}{3}\frac{T^4r}{k_1\,\rho}=$ $=c_2M\frac{dT}{dt}+p4\,\pi r^2\frac{dr}{dt}$, откуда, переходя к переменным r, T и пользуясь (2), (3)

$$\frac{dT}{dt^*}=\frac{3\,\varepsilon_0 M}{4\,\pi c_v}\,r^{-3}e^{-\tau T^{-1/3}}-\frac{16\,\pi ca}{3c_v k_0}\left(\frac{4\,\pi}{3}\right)^{n+1}M^{-(n+2)}r^{3\,n+4}T^{4+s}-$$
$$-3\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)r^{-1}\,T\,\frac{dr}{dt}. \tag{4}$$

3. Уравнения (1) и (4) представляют собой уравнения „движения" нашей модели. Легко убедиться, что условия $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dr}{dt}=\frac{dT}{dt}=0$ определяют единственное состояние равновесия r_0, T_0. Линеаризируя систему (1), (4) в точке r_0, T_0 и рассматривая характеристическое

* Формула (2) отличается от даваемой Гамовым и Теллером отсутствием множителя $T^{-2/3}$. Последний множитель по сравнению с экспонентой медленно меняется и для нас несуществен; ради простоты выкладок мы его опускаем.

уравнение получаемой линейной системы, найдем, что для реальных значений c_p/c_v, n, s оно имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Применяя критерий Раута — Гурвица, найдем условия устойчивости состояния равновесия. Существенными окажутся два условия:

$$\frac{\tau}{3} T_0^{-1/3} - s + 3n + 3 > 0; \quad 3\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\left(4 + s - \frac{\tau}{3} T_0^{-1/3}\right) - 7 - 3n < 0, \quad (5)$$

причем выполнение первого неравенства обеспечивает отрицательность действительного корня, выполнение второго — отрицательность действительной части комплексных корней.

Для интересующих нас значений c_p/c_v, n первое неравенство всегда выполняется. Отсюда следует, что при возникновении неустойчивости она окажется осцилляторного типа. Из (5) видно, что для заданных значений c_p/c_v, n и s устойчивость определяется температурой модели; для низких температур член $\frac{\tau}{3} T^{-1/3}$ велик, и возникают колебания, для высоких же температур он мал, и модель устойчива.

Мы можем принять, что температура стационарного состояния зависит от некоторого параметра, например, массы звезды. Для решения вопроса о том, будет ли амплитуда возникших колебаний нарастать неограниченно или же установятся колебания с определенной амплитудой — „автоколебания", применим для исследования нелинейной системы (1), (4) метод возмущений *. Как известно, теряемая звездой за период колебания через лучеиспускание энергия много меньше общей тепловой и гравитационной энергии. Отсюда следует, что возмущающие силы, возникающие от разогревания от ядерных реакций или от охлаждения через лучеиспускание во время колебаний, малы в сравнении с силами, возникающими при адиабатном сжатии или расширении, что и представляет необходимое условие для применения всякого метода возмущений.

Оценим работу, совершаемую возмущающими силами над нашей колебательной системой. Если в некоторый момент, соответствующий радиусу модели r, в системе выделится количество dQ' ядерной энергии, то возникающая сила будет равна $d\Phi = dp \cdot 4\pi r^2 = \frac{3MR}{\mu c_v} \frac{dQ'}{r}$, а изменение механической колебательной энергии системы благодаря работе этой силы на пути от r до $r_{равн}$ ($r_{равн}$ — радиус равновесного состояния адиабатного шара) окажется равным:

$$dW' = \int_r^{r_{равн}} \frac{3MR\,dQ'}{\mu c_v} \frac{dr}{r} = \frac{3MR\,dQ'}{\mu c_v} \ln \frac{r}{r_{равн}}$$

Полное изменение механической энергии за период колебания будет:

$$W' = -\frac{3MR}{\mu c_v} \oint \ln \frac{r}{r_{равн}} \frac{dQ'}{dt} dt = -\frac{3MR}{\mu c_v} \oint \ln \frac{r}{r_{равн}} \frac{dQ'}{dt} \frac{dr}{\dot{r}}, \quad (6)$$

где $\frac{dQ'}{dt} = \frac{3\varepsilon_0 M^2}{4\pi} r^{-3} e^{-\tau T^{-1/3}} - \frac{16\pi ca}{3k_0}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{n+1} M^{-(n+1)} r^{3n+4} T^{4+s}$; $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

* Все последующие рассуждения можно было бы провести, следуя так называемой теории малого параметра Пуанкаре, позволяющей найти периодическое решение для системы, близкой к нелинейной интегрируемой (консервативной) системе, имеющей известное семейство периодических решений.

Введем в рассмотрение интеграл

$$Q' = \oint \frac{dQ'}{dt} dt = \oint \frac{dQ'}{dt} \frac{dr}{\dot{r}}, \tag{7}$$

представляющий изменение тепловой энергии за период. Заметим, что состояние невозмущенной консервативной системы вполне определяется заданием ее механической энергии колебания W и суммы тепловой и гравитационной энергии равновесного состояния Q; в плоскости QW ее состояние будет определяться точкой. Начертим в плоскости QW кривую $W'=0$, для всех точек которой W' обращается в нуль, и кривую $Q'=0$, для точек которой Q' обращается в нуль. Рис. 1 представляет эти кривые, вычисленные для $s=3$, $n=1$, $\frac{\tau}{3} T_0^{-1/3} = 2$, $c_p/c_v = 5/3$ (последние значения обращают левую часть второго неравенства (5) в нуль, т. е. случай является бифуркационным). Для точек плоскости QW, лежащих выше кривой $W'=0$, $W'<0$ и колебания затухают, т. е. изображающая точка движется вниз; ниже же $W'>0$ колебания нарастают — изображающая точка движется вверх. Для точек выше кривой $Q'=0$ $Q'<0$ — система охлаждается, изображающая точка движется влево; для точек ниже кривой $Q'=0$ система нагревается, изображающая точка движется вправо. Руководствуясь этим, путем непосредственного рассмотрения рис. 1 легко установить, что из любой точки плоскости QW, лежащей ниже прямой $W=-Q$ (при $W>-Q$ адиабатный газовый шар не может существовать, он „разлетается“), изображающая точка будет неограниченно приближаться к точке пересечения кривых $Q'=0$, $W'=0$.

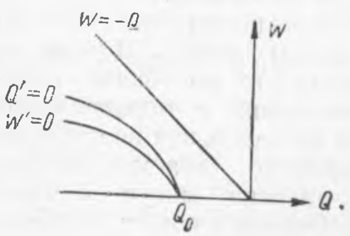

Рис. 1

С помощью (6) и (7) можно показать, что из свойств функции $e^{-\tau T^{-1/3}}$ следует, что кривые $Q'=0$ и $W'=0$ всегда имеют точку пересечения. Тем самым установлено, что при нарушении второго условия устойчивости нашей модели (5) в ней возникнут автоколебания с колебательной энергией („амплитудой“), определяемой точкой пересечения кривых $Q'=0$, $W'=0$. Режим возникновения колебаний „мягкий“: при достаточно малом нарушении условий Раута—Гурвица возникает устойчивый предельный цикл сколь угодно малой величины.

Если принять закон генерации энергии в виде $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^m$, то кривые $Q'=0$, $W'=0$ не существуют; это означает невозможность автоколебаний. Для закона генерации энергии $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^m$ при возникновении неустойчивости колебания будет неограниченно нарастать, и существование звезд типа Цефеид было бы невозможным.

В заключение выражаю А. А. Андронову благодарность за постановку задачи.

Физико-технический институт
при Горьковском государственном
университете

Поступило
1 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Atkinson u. Houtermans, Z. Physik, 54, 656 (1929). [2] A. S. Eddington, Internal Constitution of the Stars, p. 194, 1930; Monthly Notices, 101, 182 (1941). [3] J. H. Jeans, ibid., 85, 914 (1925); 87, 400, 720 (1927). [4] H. A. Bethe, Phys. Rev., 55, 434 (1939).