Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

АЭРОДИНАМИКА

Ф. И. ФРАНКЛЬ

ИСТЕЧЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ ИЗ СОСУДА С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 25 IV 1947)

В нашей работе [1] мы свели проблему истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками с максимально возможным расходом к задаче Трикоми [2] для уравнения Чаплыгина [3].

Уравнение Чаплыгина для функции тока ψ может быть написано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0, \tag{1}$$

где $\tau=\frac{w^2}{w_m^2}$ (w — модуль скорости, w_m — скорость истечения в вакуум), $\beta=\frac{1}{\varkappa-1}$ $\left(\varkappa=\frac{c_p}{c_v}\right)$, а θ — угол наклона скорости.

Точная формулировка краевой задачи следующая.

Имеем плоско-параллельный сосуд с плоскими стенками, расположенными симметрично относительно оси x и образующими с нею углы $\pm\theta_0$ (рис. 1). Расход газа должен быть максимальным и будет, конечно, пропорционален ширине отверстия. Вместо ширины отверстия можно считать заданным максимальный расход, который обозначим через $\rho_0 Q$ (ρ_0 — плотность далеко внутри сосуда).

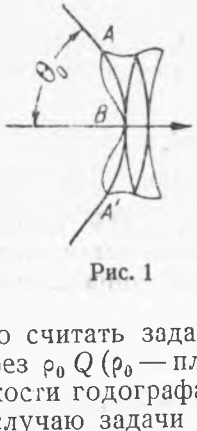

Рис. 1

Рис. 2

В плоскости годографа эта краевая задача сводится к следующему частному случаю задачи Трикоми (рис. 2).

Решение уравнения (1) ищется в области OAA_1BO плоскости (u, v), где u, v — составляющие скорости. Здесь OA, OB — прямые отрезки из начала координат под углами наклона θ_0, 0. Точки A, B лежат на линии критических скоростей ($w=a^*$). Дуги AA_1, BA_1 являются дугами характеристик уравнения (1), т. е. эпициклоид Прандтля — Буземана.

Тогда краевые условия следующие:

$$\psi = -Q/2 \text{ на } OAA_1; \qquad \psi = 0 \text{ на } OB, \tag{2}$$

причем функция ψ должна быть ограниченной во всей области.

Отрезок OA соответствует нижней стенке и вся дуга AA_1 — точке A рис. 1, т. е. краю отверстия. В окрестности этой точки мы имеем, следовательно, течение типа Прандтля — Майера.

Дуге эпициклоиды BO соответствует линия Маха, соединяющая „центр сопла" (т. е. точку на оси, где $w=a^*$) с краем отверстия.

Решение задачи может быть дано в виде ряда:

$$\psi = -\frac{Q}{2\theta_0}\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau^*)} \sin 2\nu\theta, \tag{3}$$

где $z_\nu(\tau)$ — известные функции Чаплыгина [3], τ^* — значение τ, соответствующее критической скорости, а $\nu = \pi n/2\theta_0$.

В связи с условиями, которые должны быть выполнены в окрестности центра сопла [4], имеем

$$A_n = \frac{a_0}{n^{4/3}} + a_n, \tag{4}$$

где $a_n = O(n^{-2})$.

Для краевой задачи (2) теорема единственности доказана [1] при условии, что угол $\theta_0 < 54°$, что, как мы полагаем, несущественно и связано лишь с методом доказательства. Теорема существования доказана пока лишь в приближенной постановке [5].

В настоящее время нами получено численное решение краевой задачи (2). Вычисления были проведены для случая $\theta_0 = \pi/2$ *, масштабы длины и скорости выбраны так, что $Q=1$, $w_m=1$. Тогда решение можно написать в виде:

$$\psi = -\frac{\theta}{\pi} + a_0\overline{\psi} + \delta\psi, \tag{5}$$

где

$$\overline{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau^*)} \frac{\sin 2n\theta}{n^{4/3}}, \tag{5а}$$

$$\delta\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau^*)} \sin 2n\theta. \tag{5б}$$

Функция $\overline{\psi}$ при значениях $w/a^* = 0{,}1;\ 0{,}2, \ldots, 0{,}9$ была вычислена непосредственно при помощи ряда (5а), причем были взяты 20 членов. При $w=a^*$ ряд (5а) суммируется в виде определенного интеграла на основании формулы

$$\Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ni\varphi}}{n^\alpha} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{e^{x-i\varphi}-1} \quad (\alpha > 0). \tag{6}$$

* В этом случае максимальный расход достигается при отношении внешнего давления к внутреннему $p_1/p_0 \leqslant 0{,}037$.

Далее вычислялись значения $\partial\bar{\psi}/\partial w$ при $w=a^*$ при помощи асимптотического разложения, выведенного в работе ([4]):

$$x_n^* = \frac{\tau^*}{n}\,\frac{z_n'(\tau^*)}{z_n(\tau^*)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\left(C_0 n^{-1/3} + C_1 n^{-1} + C_2 n^{-5/3} + C_3 n^{-7/3}\right) + \delta x_n^*, \qquad (7)$$

где $\delta x_n^* = O(n^{-3})$.

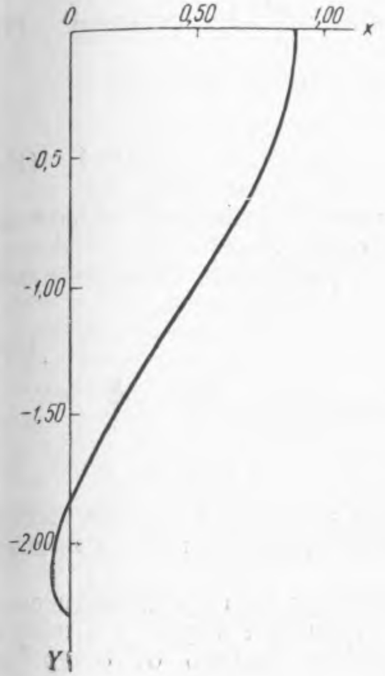

Рис. 3. Истечение из сосуда. Линия критических скоростей

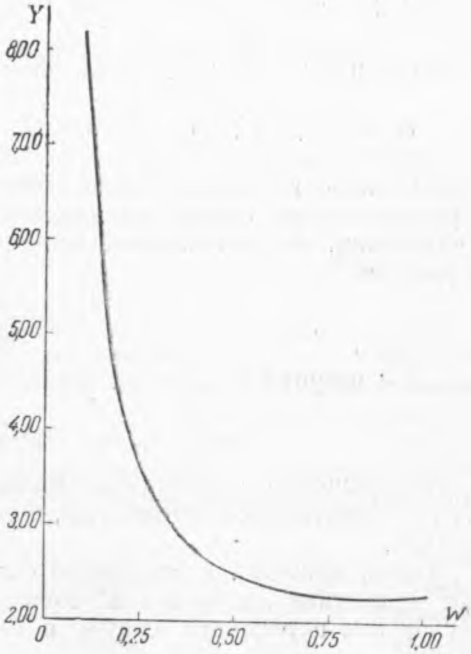

Рис. 4. Истечение из сосуда. Распределение скорости вдоль стенки. $\theta = -\pi/2$

Коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_3 были вычислены на основании таблиц функций Эйри, опубликованных акад. Фоком ([6]), причем было получено

$$C_0 = -2{,}4440, \quad C_1 = 1{,}2305, \quad C_2 = -0{,}64780, \quad C_3 = 0{,}23779. \qquad (8)$$

Асимптотическая формула оказалась чрезвычайно точной даже при малых значениях n, как показывает следующая таблица:

n	1	2	3	4
x_n^* точное	0,5254	0,4704	0,4343	0,4079
x_n^* по асимпт. формуле	0,5146	0,4696	0,4342	0,4079
δx_n^*	0,0108	0,0008	0,0001	0,0000

Пользуясь формулами (7) и (6), ряд для $\left.\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial w}\right|_{w=a^*}$ также мог быть суммирован в виде определенного интеграла с небольшим остатком,

3*

зависящим от остатков δx_n^*, очень быстро стремящихся к нулю. По получении данных Коши на дуге $w=a^*$, $0<\theta<\pi/2$ значения $\bar\psi$ в криволинейном треугольнике ABA_1 вычислялись методом характеристик. Непосредственное использование ряда (5а) было невозможно, так как в этой области он сходится чрезвычайно медленно.

При определении коэффициентов $a_0, a_1, \ldots$ мы ограничились четырьмя членами, причем краевое условие (2) было использовано при помощи метода наименьших квадратов. Иначе говоря, мы определили эти коэффициенты из условия

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}+\frac{\theta}{\pi}-a_0\bar\psi-\sum_{n=1}^{3} a_n \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau^*)} \sin 2n\theta\right]^2 d\theta = \mathrm{minimum}. \quad (9)$$

Были получены следующие значения

$$a_0=-0{,}2307, \quad a_1=-0{,}0037, \quad a_2=-0{,}0021. \quad a_3=0{,}0011. \quad (10)$$

На рис. 3 и 4 показаны полученные линия критических скоростей и распределение скоростей вдоль стенки сосуда.

Наконец, был вычислен коэффициент расхода ε, определяемый формулой

$$\varepsilon=\frac{\rho_0 Q}{2b\rho^* a^*}, \quad (11)$$

где $2b$ — ширина отверстия. Было получено значение

$$\varepsilon=0{,}85.$$

Это значение существенно больше, чем значение ε при истечении струи с критической скоростью, полученное Чаплыгиным ([3]), а именно $\varepsilon=0{,}74$.

Этого, конечно, и следовало ожидать, так как в предельном случае Чаплыгина линия $w=a^*$ совпадает с границей струи, а в нашем случае она пересекает струю и не удаляется далеко от отверстия сосуда.

Вычисления были выполнены в Математическом институте АН СССР. Автор выражает свою благодарность всем участникам работы, в особенности К. А. Семендяеву и Н. В. Леви.

Поступило
25 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, сер. мат., 9, 121 (1945). [2] Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, 1947. [3] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, Собр. соч., II (1933). [4] Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, сер. мат., 9, 389 (1945). [5] А. А. Ильина, Кандидатская диссертация, МГУ, мех.-мат. фак., 1946. [6] В. Ф. Фок, Таблицы функций Эйри, М., 1946.