Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

А. ЗЕНКИН

ОБТЕКАНИЕ ШАРА В ПРИСУТСТВИИ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 19 III 1947)

1. Постановка задачи. Шар радиуса a обтекается бесконечным прямолинейным потоком идеальной жидкости, имеющей на бесконечности скорость U_0. Будем предполагать, что при этом позади сферы по потоку устанавливается вихревое кольцо интенсивности Γ_1, плоскость которого нормальна к направлению U_0, а его центр лежит на оси симметрии течения.

Очевидно, получающееся при этом течение будет обладать осевой симметрией, а поэтому в дальнейшем будем пользоваться цилиндрической системой координат (z, q), начало которой совместим с центром шара. В такой постановке задача сводится к построению функции тока.

2. Течение вокруг шара. Как известно, обтекание шара радиуса a может быть получено комбинацией двух течений, одно из которых — прямолинейное течение со скоростью U_0, совпадающее с положительным направлением оси z, и второе — течение, обусловленное диполем с моментом $M = 2\pi a^3 U_0$.

Функция тока такого суммарного течения напишется в виде [1]:

$$\Psi_0 = -\pi U_0 q^2 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\right], \tag{1}$$

где $r = \sqrt{z^2 + q^2}$.

3. Функция тока вихревых колец. Пусть позади шара, на расстоянии z_1 от его центра, устанавливается вихревое кольцо интенсивности Γ_1 и радиуса R_1. Течение от вихревого кольца должно быть таким, чтобы поверхность шара оставалась поверхностью тока. Это значит, что на поверхности шара должно выполняться условие

$$V_n = 0,$$

где V_n — нормальная составляющая скорости течения.

Для выполнения последнего условия воспользуемся преобразованием Кельвина и отобразим внутрь сферы исходный основной вихрь. Тогда внутри сферы получим вихревое кольцо радиуса R_2 и интенсивности Γ_2, подлежащей определению. При этом, если λ_1 и λ_2, — соответственно, расстояния точек вихревых колец от центра сферы, то

$$\lambda_1 \lambda_2 = a^2. \tag{3}$$

Используя условие (2), найдем интенсивность Γ_2, которая, в отличие от плоского случая, не может быть равной Γ_1. Для этого функцию тока вихревого кольца возьмем в виде [2]:

$$\Psi=\frac{\Gamma}{2\pi}(r'+r)\left[K\left(\frac{r'-r}{r'+r}\right)-E\left(\frac{r'-r}{r'+r}\right)\right], \qquad (4)$$

где K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; $\eta=\frac{r'-r}{r'+r}$ — модуль эллиптических интегралов, $r', r,$ — соответственно, наибольшее и наименьшее расстояния от точки до вихревого кольца.

Тогда функции тока, соответственно, для исходного и отображенного колец запишутся:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1&=-\frac{\Gamma_1}{2\pi}(r_4+r_2)\left[K\left(\frac{r_4-r_2}{r_4+r_2}\right)-E\left(\frac{r_4-r_2}{r_4+r_2}\right)\right],\\ \Psi_2&=\frac{\Gamma_2}{2\pi}(r_3+r_1)\left[K\left(\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1}\right)-E\left(\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1}\right)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Граничное условие (2) для функции $\Psi=\Psi_1+\Psi_2$ перепишется так

$$z\frac{\partial\Psi}{\partial q}-q\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0. \qquad (6)$$

Подсчитав производные $\partial\Psi/\partial z, \partial\Psi/\partial q$, подставив их значения в (6) и произведя упрощения, получим уравнение для Γ_2:

$$\begin{aligned}&-\frac{\Gamma_2(r_1+r_3)z_2}{r_1r_3}[K(\eta_1)-E(\eta_1)]q+\frac{\Gamma_2(r_1+r_3)(r_1-r_3)^2z_2E(\eta_1)q}{2r_1^2r_3^2}+\\ &+\frac{\Gamma_1(r_2+r_4)z_1}{r_2r_4}[K(\eta_2)-E(\eta_2)]q-\frac{\Gamma_1(r_2+r_4)(r_2-r_4)^2z_1E(\eta_2)q}{2r_2^2r_4^2}-\\ &-\frac{\Gamma_2(r_1-r_3)R_2}{r_1r_3}[K(\eta_1)-E(\eta_1)]z+\frac{\Gamma_2(r_1-r_3)(r_1^2+r_3^2)R_2E(\eta_2)z}{2r_1^2r_3^2}+\\ &+\frac{\Gamma_1(r_2-r_4)R_1}{r_2r_4}[K(\eta_2)-E(\eta_2)]z-\frac{\Gamma_1(r_2-r_4)(r_2^2+r_4^2)R_1E(\eta_2)z}{2r_2^2r_4^2}=0.\end{aligned} \qquad (7)$$

Далее замечаем, что когда точка $M(z, q)$ находится на сфере, то, согласно принятому точечному преобразованию (3), имеем:

$$\frac{r_1}{r_3}=\frac{r_2}{r_4}=\frac{a}{\lambda_1}, \qquad (8)$$

в силу чего на сфере

$$\begin{aligned}K(\eta_1)&=K(\eta_2),\\ E(\eta_1)&=E(\eta_2),\end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$\eta_1=\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1},\quad \eta_2=\frac{r_4-r_2}{r_4+r_2}.$$

Используя (8) и (9), преобразуем (7) к виду

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma_1z_1}{r_2}-\frac{\Gamma_2z_2}{r_1}\right)\Bigg\{&\left[K(\eta_1)-E(\eta_1)+\left(1-\frac{r_1}{r_3}\right)^2\frac{E(\eta_1)}{2}\right]\left(1+\frac{r_2}{r_4}\right)q-\\ &-\left[K(\eta_1)-E(\eta_1)+\left(1+\frac{r_1}{r_3}\right)^2\frac{E(\eta_1)}{2}\right]\left(1-\frac{r_1}{r_3}\right)z\Bigg\}=0,\end{aligned} \qquad (10)$$

откуда

$$\frac{\Gamma_1z_1}{r_2}-\frac{\Gamma_2z_2}{r_1}=0,$$

ибо значение фигурной скобки, вообще говоря, не равно нулю.

Так как $\frac{z_2}{z_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ и $\frac{r_1}{r_2}=\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$, то окончательно получим

$$\Gamma_2=\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,\Gamma_1. \tag{11}$$

Итак: поверхность тока совпадает с поверхностью обтекаемого шара, если интенсивность Γ_2 отображенного вихревого кольца в $\sqrt{R_1/R_2}$ раз больше интенсивности Γ_1 основного кольца.

4. Достаточность полученного условия. Пусть интенсивность отображенного кольца

$$\Gamma_2=\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,\Gamma_1.$$

Покажем, что при этом поверхность шара $z^2+q^2=a^2$ является поверхностью тока.

Действительно, напишем функцию тока течения вокруг шара с вихревым кольцом:

$$\Psi=\Psi_0+\Psi_1+\Psi_2. \tag{12}$$

Приравнивая $\Psi=0$ и полагая $r=a$, мы должны получить поверхность тока совпадающей с поверхностью шара $r=a$. Полагая в (1) $r=a$, получаем $\Psi_0=0$ и из (12)

$$\Psi_1+\Psi_2=\left[(r_4+r_2)-\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\,(r_3+r_1)\right][K(\eta_1)-E(\eta_1)]=0.$$

Отсюда, учитывая (8), имеем

$$\lambda_1 r_3^2=\lambda_2 r_4^2 \tag{13}$$

и после преобразования (13) получаем уравнение поверхности тока

$$z^2+q^2=a^2, \tag{14}$$

что совпадает с поверхностью обтекаемого шара.

5. Таким образом, функция тока, разрешающая поставленную задачу, имеет вид:

$$\Psi=-\pi U_0 q^2\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]+\frac{\Gamma_1}{2\pi}\left\{\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}(r_3+r_1)\left[K\left(\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1}\right)-E\left(\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-(r_4+r_2)\left[K\left(\frac{r_4-r_2}{r_4+r_2}\right)-E\left(\frac{r_4-r_2}{r_4+r_2}\right)\right]\right\}. \tag{15}$$

Автор выражает благодарность А. А. Космодемьянскому за постановку задачи и за ценные советы в процессе выполнения данной работы.

Военно-воздушная инженерная академия
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
19 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 1938. В. Ф. Дюре д, Аэродинамика, 1, 1937.