Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

МЕХАНИКА

Ю. Д. СОКОЛОВ

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ГОМОГРАФИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ ТРЕХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 V 1947)

Почти все известные со времен Эйлера и Лагранжа случаи интегрируемости в задаче n тел относятся к плоскому гомографическому или пространственному гемотетическому движению. Только в одной заметке Т. Банахевича [1] приведен пример пространственного гомографического движения трех материальных точек, взаимно притягивающихся обратно пропорционально кубам расстояний. В общем виде вопрос об условиях возможности такого движения не был даже поставлен до настоящего времени.

Рассмотрим движение трех материальных точек P_i с массами m_i ($i=1, 2, 3$), взаимно притягивающихся (при $f(\Delta_{ij})<0$) или отталкивающихся (при $f(\Delta_{ij})>0$) с силами, равными:

$$m_i m_j |f(\Delta_{ij})| \quad (i, j=1, 2, 3), \tag{1}$$

где $f(\Delta_{ij})=\frac{dF(\Delta_{ij})}{d\Delta_{ij}}$ есть некоторая функция взаимного расстояния Δ_{ij}.

Отнесем движение точек к системе вращающихся осей $OXYZ$, имеющей начало в центре масс O, который, не нарушая общности, можем считать неподвижным.

Обозначив через $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$, $\bar{v}_i(x_i', y_i', z_i')$, $\bar{w}_i(x_i'', y_i'', z_i'')$, соответственно, радиус-вектор, относительную скорость и относительное ускорение точки P_i, а через $\bar{\omega}(p, q, r)$ — мгновенную угловую скорость осей $OXYZ$, напишем уравнения движения в векторной форме:

$$\bar{w}_i+\bar{\omega}'\times\bar{r}_i+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)\times 2\bar{\omega}\times\bar{v}_i=\frac{1}{m_i}\operatorname{grad}_i U, \tag{2}$$

где

$$U=\sum_{ij} m_i m_j F(\Delta_{ij}) \tag{3}$$

и штрихами обозначены производные по времени (t).

При исследовании гомографического движения с треугольной конфигурацией примем за плоскость XOY плоскость треугольника $P_1P_2P_3$, а оси OX, OY неизменно свяжем с радиусами-векторами точек.

Тогда при гомографическом движении будем иметь:

$$x_i=a_i u, \quad y_i=b_i u, \quad z_i=0, \quad r_i=l_i u, \quad \Delta_{ij}=d_k u, \tag{4}$$

где

$$l_i = +\sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad d_k = +\sqrt{(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2},$$

$$\sum m_i a_i = 0, \qquad \sum m_i b_i = 0$$

и u есть функция от t, равная единице при $t = 0$.

Подставляя (4) в (2), получим 6 уравнений для определения p, q, r, u, которые сможем заменить эквивалентной системой линейных комбинаций и интегралов;

$$p^2 - q^2 = \frac{Q - P}{u}, \quad 2pq = \frac{S + R}{u}, \quad p^2 + q^2 = \frac{c_1^2}{u^4},$$

$$bp^2 + aq^2 + (a + b) r^2 = \frac{c_2^2}{u^4}.$$

$$(a + b) u^2 u'^2 = 2u^2 (U + h) - c_2^2,$$

$$(r^2 u^4)' = (S - R) ru^3, \tag{5}$$

где (при таком выборе осей, что $\sum m_i a_i b_i = 0$):

$$a = \sum m_i a_i^2, \quad b = \sum m_i b_i^2, \quad P = \frac{1}{b} \sum m_i m_j (b_i - b_j)^2 f_k,$$

$$Q = \frac{1}{a} \sum m_i m_j (a_i - a_j)^2 f_k \quad \left(f_k = \frac{f(d_k u)}{d_k}\right),$$

$$bR = aS = \sum m_i m_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) f_k$$

и c_1^2, c_2^2, h — постоянные интегрирования.

Исключая p и q из первых трех уравнений (5) и вводя обозначения:

$$\varphi_k = u^3 f_k, \quad g_1 = \varphi_2 - \varphi_3, \quad g_2 = \varphi_3 - \varphi_1, \quad g_3 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

$$A_1 = d_1^2 l_1^2, \quad A_2 = d_2^2 l_2^2, \quad 2A_3 = d_1^2 l_1^2 + d_2^2 l_2^2 - d_3^2 l_3^2 \quad (A_1 A_2 - A_2^2 > 0),$$

получим первое условие, которому должна удовлетворять функция $f(\Delta)$, в виде:

$$A_2 g_1^2 + 2A_3 g_1 g_2 + A_1 g_2^2 = c^4 > 0, \tag{I}$$

где

$$c_2 = \frac{|\delta|}{M} c_1^2 \quad (M = m_1 + m_2 + m_3, \; \delta = \delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{31}, \; \delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i).$$

Из (5) через исключение p, q, r, u' $(u' \neq 0)$ получим второе условие в виде:

$$\left[(a - b)^2 c_1^4 - \left(\sum D_k \varphi_k\right)^2\right]\left(c_3 + \sum D_k \varphi_k\right) =$$

$$= \left(\sum D_k u \dot{\varphi}_k\right)^2 \left(u^2 U + hu^2 - \frac{c_2^2}{2}\right), \tag{II}$$

где $D_k = m_i m_j d_k^2 - M m_k l_k^2$, $c_3 = 2c_2^2 - (a + b) c_1^2$ и точкой обозначена производная по u.

При $c^2 = 0$ по (5) $p = q = 0$, и движение — плоское. В этом случае, по (I), $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, $f_1 = f_2 = f_3$, откуда $d_1 = d_2 = d_3$ (или $f(\Delta) = A\Delta$), и (II) выполняется при произвольной функции $f(\Delta)$. Следовательно, равносторонний треугольник является единственно возможной треугольной конфигурацией для плоского гомографического движения при произвольной функции $f(\Delta)$, кроме $f(\Delta) = A\Delta$. Наоборот, при пространственном $(c^2 > 0)$ гомографическом движении эта конфигурация невозможна.

Можно показать, что из всех функций, допускающих в некоторой области представление в виде обобщенного степенного ряда

$$f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \Delta^{\beta_j}$$

($\alpha_i > 0$, $\beta < 0$ или $\alpha_i < 0$, $\beta_j > 0$) только функция

$$f(\Delta) = A\Delta + B\Delta^{-3} \quad (B \neq 0)$$

удовлетворяет условиям (I) и (II)* с условием для конфигурации

$$m_1 e_1\left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_3^4}\right) + m_2 e_2\left(\frac{1}{d_3^4} - \frac{1}{d_1^4}\right) + m_3 e_3\left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4}\right) = \frac{\delta}{B}(R_0 - S_0) = 0$$

$$\left(e_i = \frac{d_j^2 + d_k^2 - d_i^2}{2}\right)^{**}.$$

При $A = 0$, $B < 0$ получаем частный случай Т. Банахевича.

Движение системы (при соответствующих начальных скоростях) происходит так, что треугольник $P_1 P_2 P_3$, сохраняя подобие, вращается около некоторой неподвижной оси, лежащей в его плоскости; каждая точка описывает, в общем случае ($u' \neq 0$, $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$), кривую двоякой кривизны, лежащую на конусе вращения с вершиной в центре масс.

Если $u' = 0$ ($u = 1$), то p и q — постоянные, не обращающиеся одновременно в нуль при пространственном движении ($c_1^2 > 0$). Тогда $r = 0$, и треугольник $P_1 P_2 P_3$ как неизменяемая система, равномерно вращается около оси, лежащей в его плоскости. Для возможности подобного движения необходимо и достаточно (кроме соответствующих условий для начальных скоростей), чтобы взаимные расстояния точек были связаны с массами двумя соотношениями

$$m_1 e_1 g_{10} + m_2 e_2 g_{20} + m_3 e_3 g_{30} = 0, \quad m_1 f_{20} f_{30} + m_2 f_{30} f_{10} + m_3 f_{10} f_{20} = 0$$

и чтобы при этой конфигурации было $P_0 \leqslant 0$, $Q_0 \leqslant 0$. Эквидистантная конфигурация при пространственном движении невозможна; равнобедренная конфигурация при $f_{i0} \neq 0$ возможна только при равенстве двух масс.

Наконец, в случае прямолинейной конфигурации, выбрав соответствующую прямую за ось OX, легко убедимся, что движение этой прямой в пространстве сводится к вращению ее около некоторой перпендикулярной к ней неподвижной оси, и движение системы происходит в одной плоскости.

Поступило
7 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Banachiewicz, C. R., 142 (1906).

* Условию (I) формально можно удовлетворить рядом: $f(\Delta) = A\Delta + \frac{1}{\Delta^3} \sum_{j=0}^{\infty}$ ($\alpha \neq -3$), который, однако, удовлетворяет (II) только при $B_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots \infty$).

** Нулевым индексом обозначены значения функций при $u = 1$.