Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

МЕХАНИКА

С. С. БЮШГЕНС

КРИТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПОТОКА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 23 IV 1947)

Стационарный поток идеального невесомого газа при отсутствии трения и теплопроводности принято для краткости называть адиабатическим потоком. В основу его исследования могут быть положены:

1) уравнение Эйлера

$$(\overline{V}\,\mathrm{grad})\,\overline{V} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = 0; \tag{1}$$

2) уравнение неразрывности

$$\mathrm{div}\,(\rho\overline{V}) = 0; \tag{2}$$

3) уравнение, связывающее давление p и плотность ρ,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \tag{3}$$

где $\overline{V}$ — вектор скорости потока.

Обозначим через a локальную скорость звука в газовом потоке. Тогда

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{kp_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} = \frac{kp}{\rho}, \tag{4}$$

и потому

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{2a\,da}{k-1} = dA, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2da}{(k-1)\,a} = \frac{dA}{a^2}, \tag{5}$$

где для краткости принято $A = \dfrac{a^2}{k-1}$.

Обозначим далее через I единичный вектор по направлению скорости, а через V — величину последней, так что

$$\overline{V} = V\,I. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\left(\overline{V}\,\mathrm{grad}\right) = \frac{ds}{dt}\,\frac{d}{ds} = V\,\frac{d}{ds},$$

где $\dfrac{d}{ds}$ — символ производной по направлению линии тока и ds — дифференциал дуги последней; в таком случае уравнение Эйлера можно переписать в виде

$$V\,\frac{dV}{ds}\,I + V^2\,\frac{dI}{ds} + \mathrm{grad}\,A = 0, \tag{1'}$$

а уравнение неразрывности в виде:

$$V \operatorname{div} I + I \operatorname{grad} V + \frac{V}{a^2}\frac{dA}{ds} = 0,$$

или

$$V \operatorname{div} I + \frac{dV}{ds} + \frac{V}{a^2}\frac{dA}{ds} = 0. \qquad (2')$$

Умножая соотношение (1′) скалярно на I, мы получим уравнение

$$V\frac{dV}{ds} + \frac{dA}{ds} = 0, \qquad (7)$$

дающее теорему Бернулли о постоянстве выражения

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1}$$

вдоль линии тока; если же из уравнений (2′) и (7) исключить $\frac{dV}{ds}$, то найдем

$$\left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{dA}{ds} - \operatorname{div} I = 0. \qquad (8)$$

Величина $-\operatorname{div} I$ есть средняя кривизна [1] векторного поля (I), т. е. поля направлений скоростей потока или конгруенции линий тока; если равенство

$$\operatorname{div}\left(\frac{V}{V}\right) = 0 \qquad (9)$$

имеет место во всех точках потока (тождественно), то скоростное поле или конгруенцию линий тока я называю **минимальным**; если равенство (9) не будет тождеством, то оно даст **уравнение поверхности**, которую я назову **минимальной** или **критической** поверхностью векторного поля (I) (поля скоростей).

Из уравнения (8) следует, что для тех точек потока, для которых

$$V^2 = a^2, \qquad \frac{dA}{ds} \neq \infty, \qquad (10)$$

непременно должно выполняться условие (9).

Итак: **все точки адиабатического потока, в которых скорость течения достигает критического значения, лежат на минимальной (критической) поверхности конгруенции линий тока.**

Наоборот, для точек поверхности (9) мы непременно должны иметь

$$\left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{dA}{ds} = 0,$$

т. е. либо $V^2 = a^2$, либо $\frac{dA}{ds} = 0$; в последнем случае, в силу уравнения (7), также и $\frac{dV}{ds} = 0$, и мы будем говорить, что при изменении вдоль линии тока как скорость течения, так и скорость звука в точке минимальной поверхности получают экстремальные значения.

Итак: **минимальная (критическая) поверхность есть место таких точек, в каждой из которых либо ско-**

рость течения равна скорости звука, либо обе эти величины имеют экстремальные значения при их изменении вдоль соответствующей линии тока (т. е проходящей через выбранную точку поверхности).

Минимальная поверхность вполне определяется уравнением (9), если известна конгруенция линий токов; например, для потенциального потока, когда $\overline{V} = \operatorname{grad} \Phi$, уравнение минимальной поверхности будет

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} \Phi}{\sqrt{(\operatorname{grad} \Phi)^2}} = 0, \tag{9'}$$

или в декартовой системе координат

$$(\Phi_2^2 + \Phi_3^2) \Phi_{11} + (\Phi_3^2 + \Phi_1^2) \Phi_{22} + (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \Phi_{33} - 2\Phi_2\Phi_3\Phi_{23} - \\ - 2\Phi_3\Phi_1\Phi_{31} - 2\Phi_1\Phi_2\Phi_{12} = 0, \tag{9''}$$

где индексами обозначены производные от потенциала скорости по аргументам x, y, z.

Если конгруенция линий (или поле их касательных) имеет ортогональное семейство поверхностей, то, как известно, средняя кривизна поля в какой-либо точке равна средней кривизне соответствующей ортогональной поверхности; ту линию на какой-либо поверхности, вдоль которой средняя кривизна поверхности равна нулю, назовем для краткости минимальной линией поверхности. Итак, если конгруенция линий тока (или поле их касательных) имеет ортогональное семейство поверхностей, то минимальная (критическая) поверхность поля есть геометрическое место минимальных линий ортогональных поверхностей.

В частности, для плоско-параллельного потока существует семейство поверхностей, ортогональных линиям тока, именно, семейство цилиндров, на которых ортогональные траектории образующих вместе с тем ортогональны к линиям тока; на цилиндре линиями кривизны будут образующие (кривизна их нуль) и их ортогональные траектории; поэтому точки цилиндра, для которых его средняя кривизна равна нулю, будут точками перегиба ортогональных траекторий образующих.

Итак, *в плоском адиабатическом потоке скорость течения может достигать скорости звука только в точках перегиба ортогональных траекторий линий тока*.

Рассмотрим теперь *критический поток*, т. е. поток, в каждой точке которого скорость течения равна скорости звука; тогда, в силу уравнения (8), равенство (9) должно выполняться всюду, т. е. конгруенция линий тока должна быть минимальной. Далее, так как $V^2 = a^2$, то из условия (7) следует, что

$$\frac{dV}{ds} = 0, \qquad \frac{dA}{ds} = 0,$$

т. е. критическая скорость должна быть постоянной вдоль каждой линии тока. Наконец, умножая уравнение (1') на произвольное перемещение точки $d\overline{M}$, в силу равенства

$$\operatorname{grad} A \; dM = dA,$$

мы получим

$$\frac{2\,da}{(k-1)\,a} = -\frac{d\overline{I}}{ds} d\overline{M}. \tag{11}$$

Вектор $\frac{dl}{ds}$ есть вектор кривизны линии тока; условием интегрируемости уравнения (11) является требование, чтобы правая часть этого уравнения была полным дифференциалом, т. е. чтобы поле векторов кривизны линий тока было некоторым градиентным векторным полем; такую минимальную конгруенцию линий я называю специальной минимальной конгруенцией.

Итак, чтобы адиабатический поток был критическим, необходимо и достаточно, чтобы конгруенция линий тока была специальной минимальной конгруенцией.

Поступило
23 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Бюшгенс, Изв. АН СССР, сер. мат., 10 (1946).