Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. К. ФАДДЕЕВ

О ФАКТОР-СИСТЕМАХ В АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 IV 1947)

1°. Пусть $\mathfrak{A}$ есть аддитивно записанная абелева группа и $\mathfrak{F}$ — группа, элементы которой являются (правыми) операторами в $\mathfrak{A}$.

Фактор-системой с k индексами группы $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{A}$, или просто k-фактор-системой (k-ф.с.), мы будем называть функцию от k аргументов, каждый из которых пробегает группу $\mathfrak{F}$, со значениями $a_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}$ из $\mathfrak{A}$, удовлетворяющую уравнению

$$a_{\varphi_2,\varphi_3,\ldots,\varphi_{k+1}}+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i a_{\varphi_1,\ldots,\varphi_i\varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{k+1}}+$$
$$+(-1)^{k+1}a_{\varphi_1,\varphi_2\ldots\varphi_k}\varphi_{k+1}=0. \qquad (1)$$

При $k=0$ уравнение (1) превращается в $a-a\cdot\varphi=0$, т. е. 0-ф.с. суть инвариантные относительно всех операторов $\varphi\in\mathfrak{F}$ элементы группы $\mathfrak{A}$. При $k=1$ уравнение (1) принимает вид (в мультипликативной записи) $a_{\varphi_1}^{\varphi_2}a_{\varphi_2}=a_{\varphi_1\varphi_2}$. Решения этого уравнения носят название скрещенных характеров $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{A}$. При $k=2$ уравнение (1) превращается (в мультипликативной записи) в

$$a_{\varphi_1,\varphi_2}^{\varphi_3}\,a_{\varphi_1\varphi_2,\varphi_3}=a_{\varphi_1,\varphi_2\varphi_3}\,a_{\varphi_2,\varphi_3}.$$

Решения этого уравнения собственно и имеют название фактор-систем.

Скрещенные характеры и 2-ф.с. играют важную роль во многих вопросах алгебры — в теории расширений групп, в теории полей, в теории алгебр и т. д. k-фактор-системы являются их формальными обобщениями, и мы их вводим в рассмотрение с целью унификации изложения некоторых вопросов теории скрещенных характеров и обыкновенных фактор-систем, а также из-за того, что в этой работе, в качестве вспомогательного средства при изучении обыковеннных ф.с., будут использованы ф.с. с тремя индексами.

Лемма 1. *Если $a_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ и $b_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ две k-ф.с., то их разность $c_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}=a_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}-b_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ есть k-ф.с. Таким образом, k-ф.с. образуют абелеву группу относительно сложения.*

Лемма 2. *Пусть $b_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}\in\mathfrak{A}$ — значения некоторой функции от $k-1$ аргумента и пусть*

$$c_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}=b_{\varphi_2,\ldots\varphi_k}+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i b_{\varphi_1,\ldots\varphi_i\varphi_{i+1}\ldots\varphi_k}+(-1)^k b_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}\cdot\varphi_k \qquad (2)$$

Тогда $c_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ есть k-ф.с.

Доказывается подстановкой в уравнение (1).

Определение. k-ф.с. вида (2) называется главной k-ф.с.

Лемма 3. *Главные k-ф. с. образуют подгруппу группы всех k-ф.с.*

Будем обозначать группу всех k-ф.с. через $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}^k$, группу главных k-ф.с. через $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}^k$, фактор-группу $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}^k/\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}^k$ через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^k$. Группу $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^k$ будем называть k-мультипликатором группы $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{A}$.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{F}$ есть конечная группа порядка m, то k-ф.с. $ma_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}$ — главная при любой k-ф.с. $a_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$.*

Доказывается суммированием по φ_1 определяющего уравнения (1).

Теорема 1. *Если в группе $\mathfrak{A}$ возможно и однозначно деление на порядок конечной группы операторов $\mathfrak{F}$, то все k-ф.с. главные.*

Непосредственно следует из леммы 4.

2°. Пусть $\mathfrak{b}$ некоторая (аддитивно записанная) абелева группа и $\mathfrak{F}$ — некоторая группа. Рассмотрим группу функций от одного аргумента, определенную на $\mathfrak{F}$, со значениями из $\mathfrak{b}$. Под суммой $f_3=f_1+f_2$ двух функций f_1 и f_2 понимается функция, значения которой определяются равенством $f_3(\varphi)=f_1(\varphi)+f_2(\varphi)$.

В группе функций определим операторы из $\mathfrak{F}$, считая $f^{\varphi}(\psi)=f(\varphi\psi)$. (операторы пишем над функциональным знаком только с целью удобства записи). Аксиомы операторной группы легко проверяются.

Теорема 2. *Все k-ф.с. в группе функций главные* ($k>0$).

Доказательство. Легко видеть, что, если $f_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ k-ф.с., то

$$f_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}=g_{\varphi_2,\ldots\varphi_k}+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i g_{\varphi_1,\ldots\varphi_i\varphi_{i+1},\ldots\varphi_k}+(-1)^k g^{\varphi_k}_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}},$$

где $g_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}(\psi)=(-1)^k f_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1},\psi}$ (1).

Лемма 5. *Если $\mathfrak{A}$ есть группа, для которой $\mathfrak{F}$ есть группа операторов, то $\mathfrak{A}$ операторно изоморфна некоторой допустимой подгруппе группы функций от $\varphi\in\mathfrak{F}$ со значениями в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Положим $f_a(\varphi)=a\cdot\varphi$. Соответствие $a\to f_a$ дает требуемый операторный изоморфизм.

Лемма 6. *Если $\mathfrak{A}$ есть группа, для которой конечная группа $\mathfrak{F}$ является группой операторов, то $\mathfrak{A}$ операторно изоморфна фактор-группе группы функций по некоторой допустимой подгруппе.*

Доказательство. Положим $a_f=\sum\limits_{\varphi\in\mathfrak{F}}[f(\varphi)]\cdot\varphi^{-1}$. Отображение $f\to a_f$ есть операторный гомоморфизм группы функций на $\mathfrak{A}$, так что $\mathfrak{A}$ операторно изоморфна фактор-группе группы функций по ядру гомоморфизма.

Таким образом, каждая абелева группа с группой операторов может быть погружена как в качестве подгруппы, так и в качестве фактор-группы по допустимой подгруппе (последнее, если группа операторов конечна) в группу, в которой все k-ф.с. главные.

3°. Пусть $\mathfrak{b}$ — абелева группа с группой операторов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}$ — ее допустимая подгруппа.

Теорема 3.

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}^k\cap\mathfrak{H}_{\mathfrak{b}}^k/\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}^k\approx\mathfrak{N}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}}^{k-1}/\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{b}}^{k-1}. \tag{3}$$

Здесь $\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{b}}^{k-1}$ обозначает группу $(k-1)$-ф. с. группы $\mathfrak{b}/\mathfrak{A}$, порожденных $(k-1)$-ф.с. группы $\mathfrak{b}$ при естественном гомоморфизме $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{b}/\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $a_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ есть k-ф.с., принадлежащая $\mathfrak{N}^k_{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{H}^k_{\mathfrak{b}}$, т. е. k-ф.с. из $\mathfrak{A}$, становящаяся главной в $\mathfrak{b}$. Тогда

$$a_{\varphi_1,\ldots\varphi_k} = b_{\varphi_2,\ldots\varphi_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i b_{\varphi_1,\ldots\varphi_i\varphi_{i+1},\ldots\varphi_k} + \\ + (-1)^k b_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}} \cdot \varphi_k. \tag{4}$$

В этом равенстве $b_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}$ определена с точностью до слагаемого, являющегося $(k-1)$-ф.с. в $\mathfrak{b}$. Перейдем в равенстве (4) в фактор-группу $\mathfrak{b}/\mathfrak{A}$ посредством естественного гомоморфизма $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{b}/\mathfrak{A}$, обозначив этот гомоморфизм черточкой наверху. Получим:

$$0 = \overline{b}_{\varphi_2,\ldots\varphi_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \overline{b}_{\varphi_1,\ldots\varphi_i\varphi_{i+1}\ldots\varphi_k} + (-1)^k \overline{b}_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}} \cdot \varphi_k.$$

Отсюда следует, что $\overline{b}_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}} \in \mathfrak{N}^{k-1}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}}$. При этом $\overline{b}_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}$ определена с точностью до произвольного слагаемого из $\overline{\mathfrak{N}}^{k-1}_{\mathfrak{b}}$. Таким образом, каждой k-ф.с. из $\mathfrak{N}^k_{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{H}^k_{\mathfrak{b}}$ однозначно сопоставляется элемент группы $\mathfrak{N}^{k-1}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{N}}^{k-1}_{\mathfrak{b}}$. Это отображение гомоморфно, и ядром является группа главных в $\mathfrak{A}$ k-ф.с. При этом любая $(k-1)$-ф.с. $\overline{b}_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}$ из $\mathfrak{N}^{k-1}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}}$ может быть получена указанным образом, в чем легко убедиться, выбрав из $\overline{b}_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}$ произвольных представителей $b_{\varphi_1,\ldots\varphi_{k-1}}$ и составив $a_{\varphi_1,\ldots\varphi_k}$ по формуле (4). Теорема доказана.

Легко видеть, что $\overline{\mathfrak{N}}^{k-1}_{\mathfrak{b}} \supset \mathfrak{H}^{k-1}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}}$, так как каждая главная $(k-1)$-ф. с. группы $\mathfrak{b}/\mathfrak{A}$ порождается некоторой главной $(k-1)$-ф.с. группы $\mathfrak{b}$.

Теорема 4. *Если в группе $\mathfrak{b}$ все k-ф.с. и $(k-1)$-ф.с. главные, то* $\mathfrak{M}^k_{\mathfrak{A}} \approx \mathfrak{M}^{k-1}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 3.

4°. Рассмотрим один пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — конечная группа, а группа E порождается производящими $e^{\varphi}, \varphi \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющими, кроме соотношений коммутирования, единственному условию $\prod\limits_{\varphi \in \mathfrak{F}} e^{\varphi} = 1$.

Операторы определяются посредством равенства: $(e^{\varphi_1})^{\varphi_2} = e^{\varphi_1\varphi_2}$. Исследованию скрещенных характеров и фактор-систем в этой группе посвящена работа Clifford'а и MacLane'а [1]. Эта группа названа авторами группой абстрактных единиц.

Теорема 5. *Мультипликаторы группы $\mathfrak{F}$ в группе абстрактных единиц изоморфны соответствующим мультипликаторам группы $\mathfrak{F}$ на группе (по умножению) точек единичной окружности при единичных операторах.*

Доказательство. Группа абстрактных единиц, очевидно, операторно изоморфна фактор-группе группы функций $\mathfrak{b}$, определенных на $\mathfrak{F}$, со значениями на бесконечной циклической группе, по подгруппе $\mathfrak{A}$ функций, принимающих одинаковые значеиия при всех $\varphi \in \mathfrak{F}$. В силу теорем 2, 4,

$$\mathfrak{M}^k_E = \mathfrak{M}^k_{\mathfrak{b}/\mathfrak{A}} \approx \mathfrak{M}^{k+1}_{\mathfrak{A}}.$$

Группа $\mathfrak{A}$, очевидно, операторно изоморфна бесконечной циклической группе, т. е. группе $\mathfrak{A}'$ целых чисел относительно сложения, при единичных операторах. Погрузим $\mathfrak{A}'$ в группу $\mathfrak{G}$ действительных чисел. В силу теоремы 1 все k-ф.с. в группе $\mathfrak{G}$ главные. Следовательно, на основании теоремы 4, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}'}^{k+1} \approx \mathfrak{M}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'}^{k}$. Итак, $\mathfrak{M}_E^k \approx \mathfrak{M}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'}^k$.

Но $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'$ есть группа действительных чисел относительно сложения по модулю 1, т. е. группа, изоморфная группе точек единичной окружности относительно умножения.

Очевидно, что $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'}^1$ есть группа обыкновенных линейных характеров группы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{A}'}^2$ есть мультипликатор I. Schur'a группы $\mathfrak{F}$.

Теорема 5 была доказана ([1]) (для $k=1, 2$) только для разрешимых групп $\mathfrak{F}$.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
28 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Clifford and C. R. MacLane, Trans. Am. Math. Soc., **50**, 385 (1941).