Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. И. НЕЙМАРК

К ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком А. А. Андроновым 20 IV 1947)

1. В настоящей заметке дается новый подход к решению задачи определения числа корней комплексного полинома с отрицательной и положительной действительной частью. Он позволяет более коротким путем получить известные редукции Шура и Беньяминовича, а также неравенства Раут — Гурвица и им аналогичные для комплексных полиномов. Последние, по соображениям истории вопроса, здесь названы неравенствами Эрмита — Гурвица. Редукция § 7, которая в § 8 использована для вывода условий Эрмита — Гурвица и Раут — Гурвица, в применении к численно заданным полиномам оказывается проще редукций Шура и Беньяминовича.

2. Пусть R_{2n} — пространство комплексных полиномов n-й степени * и $D(k, n-k)$ — множество полиномов R_{2n}, имеющих k корней слева и $n-k$ справа от мнимой оси комплексной сферы **. Обозначим через L_{2n-1} границу всех множеств D. Точки L_{2n-1}, граничные к $s+1$ различным областям $D(k, n-k)$, $D(k+1, n-k-1), \ldots, D(k+s, n-k-s)$, будем называть s-кратными и говорить, что они типа $(k, s, n-k-s)$. В дальнейшем удобно считать области D-0-кратной границей и говорить, что $D(k, n-k)$ типа $(k, 0, n-k)$. Так что $P_n \subset L_{2n-1}(k, s, n-k-s)$ тогда и только тогда, когда P_n имеет k корней слева от мнимой оси, s на мнимой оси и $n-k-s$ справа от нее.

3. Пусть P_n — произвольный полином R_{2n} и $y^n P_n\left(i\frac{x}{y}\right) = f_n(x, y) + ig_n(x, y)$, где $f_n = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n$ и $g_n = b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \ldots + b_ny^n$ — действительные полиномы. Обозначим через $\delta(f_n, g_n)$ общий наибольший делитель полиномов f_n и g_n. Полином P_n принадлежит s-кратной границе тогда и только тогда, когда $\delta(f_n, g_n)$ имеет s действительных корней, и при непрерывном перемещении P_n в пространстве R_{2n} переход с границы одного типа на границу другого типа может осуществиться лишь при изменении числа действительных корней $\delta(f_n, g_n)$.

4. Поставим в соответствие полиному P_n пару полиномов $\begin{Bmatrix} f_n \\ g_n \end{Bmatrix}$ или, что то же, таблицу

$$\begin{Bmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_n \\ b_0, & b_1, & \ldots, & b_n \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

* Точка R_{2n} — совокупность полиномов, отличающихся друг от друга произвольным, отличным от нуля, постоянным множителем.

** Множества $D(k, n-k)$, как это нетрудно заметить, гомеоморфны $2n$-мерному евклидову пространству.

Пусть τ_{11}, τ_{12}, τ_{21} и τ_{22} — произвольные действительные числа и $\Delta=\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21}\neq 0$, тогда $\delta(\tau_{11}f_n+\tau_{12}g_n,\ \tau_{21}f_n+\tau_{22}g_n)=\delta(f_n, g_n)$.

Пару полиномов

$$\left\{\begin{matrix}\tau_{11}f_n+\tau_{12}g_n\\ \tau_{21}f_n+\tau_{22}g_n\end{matrix}\right\} \tag{2}$$

можно непрерывно и не обращая Δ в нуль перевести либо в пару $\left\{\begin{matrix}f_n\\ g_n\end{matrix}\right\}$, если $\Delta>0$, либо в пару $\left\{\begin{matrix}f_n\\ -g_n\end{matrix}\right\}$, если $\Delta<0$. Поэтому если $P_n\subset L_{2n-1}(k, s, n-k-s)$, то полином, соответствующий паре полиномов (2), для $\Delta>0$ принадлежит $L_{2n-1}(k, s, n-k-s)$, а для $\Delta<0$, так как паре полиномов $\left\{\begin{matrix}f_n\\ -g_n\end{matrix}\right\}$ соответствует полином $\overline{P}(-z)$, оно принадлежит $L_{2n-1}(n-k-s, s, n)$.

5. Редукция к полиному с известным корнем. Потребуем, чтобы полином Q_n, соответствующий таблице (2), допускал корень $z=\xi$, т. е. чтобы $(\tau_{11}+i\tau_{21})f_n(-i\xi, 1)+(\tau_{12}+i\tau_{22})g_n(-i\xi, 1)=0$.

Если $Q_n=(z-\xi)\ P^{n-1}\subset L_{2n-1}\ (k, s, n-k-s)$, то при $\Delta>0$ $P_n\subset L_{2n-1}\ (k, s, n-k-s)$, а при $\Delta<0$ $P_n\subset L_{2n-1}(n-k-s, s, k)$*.

6. Пусть полиному P_n соответствует таблица вида

$$\left\{\begin{matrix}a_0, & a_1, & \ldots, & a_{j-1}, & a_j, & a_{j+1}, & \ldots, & a_n\\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & b_j, & b_{j+1}, & \ldots, & b_n\end{matrix}\right\}\qquad (b_j\neq 0,\ a_0\neq 0). \tag{3}$$

Тогда парам полиномов

$$\left\{\begin{matrix}f_n+\lambda\left(\dfrac{x}{y}\right)^t g_n\\ g_n\end{matrix}\right\} \tag{4}$$

для $0\leqslant t<j$ и произвольного действительного λ или $t=j$ и действительного λ такого, что отрезок $[0, \lambda]$ не содержит точки $-a_0/b_j$, соответствуют полиномы, принадлежащие границе того же типа, что и полином P_n.

7. Редукция на границу большей кратности. Пользуясь $(2, \Delta>0)$, таблицу (1), соответствующую данному полиному P_n, можно преобразовать в таблицу, у которой $b_0=0$ и $a_0\neq 0$. Пусть в ряде коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_n$ b_j — первый, отличный от нуля. От полученной только что таблицы, согласно (4), перейдем к таблице

$$\left\{\begin{matrix}a_0+\lambda b_j, & a_1+\lambda_0 b_{j+1}+\lambda_1 b_j, & \ldots, & a_j+\lambda_0 b_{2j}+\lambda_1 b_{2j-1}+\ldots+\lambda_j b_j, & a_{j+1}, \ldots, a_n\\ 0, & 0 & \ldots, & b_j & , b_{j+1}, \ldots, b_n\end{matrix}\right\} \tag{5}$$

Ей соответствует полином

$$(a_0+\lambda_0 b_j)(-iz)^n+(a_1+\lambda_0 b_{j+1}+\lambda_1 b_j)\ (-iz)^{n-1}+\ldots+(a_j+\lambda_0 b_{2j}+\ldots+\lambda_j b_j+ib_j)(-iz)^{n-j}+\ldots \tag{6}$$

Рассмотрим систему

$$a_0+\lambda_0 b_j=0,\qquad a_1+\lambda_0 b_{j+1}+\lambda_1 b_j=0, \ldots, a_j+\lambda_0 b_{2j}+\ldots+\lambda_j b_j=0. \tag{7}$$

В силу $b_j\neq 0$ решение последних $j-1$ уравнений можно представить в виде

---

* Полагая $\tau_{11}=1+\varepsilon_1$, $\tau_{22}=1-\varepsilon_1$ и $\tau_{12}=\tau_{21}=\varepsilon_2$, придем к полиному $Q_n=P_n(z)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)\overline{P}_n(-z)$, причем $\Delta=1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)$, и полином этого вида, допускающий корень $z=\xi$, будет $\overline{P}_n(-\xi)P_n(z)-P_n(\xi)\overline{P}(-z)$, что приводит к известным редукциям Шура [1] и Беньяминовича [2].

$$\lambda_k = A_k\lambda_0 + B_k \quad (k = 1, 2, \ldots, j). \tag{8}$$

Оставляя $\lambda_0 = 0$, непрерывно перейдем от значений $\lambda_k = 0$ к значениям $\lambda_k = B_k$. При этом полином, соответствующий таблице (5), перейдет в полином Q_n вида

$$(a_0 + \lambda_0 b_j)(-iz)^n + * + ib_j(-iz)^{n-j} + \ldots \tag{9}$$

При изменении λ_0 от нуля до $-a_0/b_j$, не включая $-a_0/b_j$, и λ_k согласно (8) полином (6) все время остается вида (9), принадлежит границе того же типа, что и P_n, и при $\lambda_0 \to -a_0/b_j$ j его корней стремятся к точке $z = \infty$. Из (9) легко находим $z = \sqrt[j]{-\dfrac{b_j + \frac{1}{z}(\ldots)}{a_0 + \lambda_0 b_j}(i)^{j+1}}$, и, следовательно, если $j = 2m$, при $\lambda_0 \to -a_0/b_j$ с левой полуплоскости отрождается m корней; если же $j = 2m+1$, то отрождается m корней, если $a_0/b_j > 0$, и $m+1$, если $a_0 b_j < 0$. Таким образом мы перешли от полинома P_n к полиному P_{n-j} и так, что если $P_{n-j} \subset L_{2n-2j-1}\,(k, s, n-2j-k-s)$ и при этом переходе отродилось m корней с левой полуплоскости, то $P_n \subset L_{2n-1}(k+m, s, n-k-m-s)$. В частности, если $b_1 \neq 0$, что, например, всегда имеет место, когда $P_n \subset L_{2n-1}(k, s, 0)$ и $k > 0$, то из $P_{n-1} \subset L_{2n-3}\,(k, s, n-k-s-1)$ при $a_0 b_1 < 0$ следует, что $P_n \subset L_{2n-1}(k+1, s, n-k-s-1)$, а при $a_0 b_1 > 0$ следует, что $P_n \subset L_{2n-1}(k, s, n-k-s)$.

Пример. Пусть дан полином $P_4 = z^4 - z^3 + (-2+2i)z^2 - 2iz - 4i$ (ему соответствует таблица $\begin{Bmatrix} 1, 0, & 2, 2, & 0 \\ 0, 1, -2, & 0, -4 \end{Bmatrix}$). При вычислениях удобней пользоваться последовательно преобразованиями $\begin{Bmatrix} f_n \\ g_n \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \lambda f_n \\ \mu g_n \end{Bmatrix}$ $\mu\lambda > 0$, $\to \begin{Bmatrix} f_n + \tau g_n \\ g_n \end{Bmatrix}, \to \begin{Bmatrix} f_n \\ g_n + \nu f_n \end{Bmatrix}$ и при $b_0 = 0, b_1 \neq 0 \to \begin{Bmatrix} f_n + \lambda\omega g_n \\ g_n \end{Bmatrix}$.

В нашем случае $\begin{Bmatrix} 1, 0, & 2, 2, & 0 \\ 0, 1, & -2, 0, & -4 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 2, & 2, 6, & 0 \\ 1, & -2, 0, & -4 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 1, & 1, 3, & 0 \\ 1, & -2, 0, & -4 \end{Bmatrix} \to$ $\to \begin{Bmatrix} 1, & 1, & 3, & 0 \\ 0, & -3, & -3, & -4 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 3, & 3, & 9, & 0 \\ 0, & -3, & -3, & -4 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 0, & 5, & 0 \\ -3, & -3, & -4 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ -3, & -4 \end{Bmatrix}$ и, следовательно, $P_4 \subset D\,(2, 2)$.

8. Критерий Эрмита — Гурвица ([3,5]).

Назовем матрицу

$$A_{2n} \equiv \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & a_0,\ a_1, & a_2,\ a_3, \ldots & a_n,\ 0, \ldots\ldots & 0 & \\
B_2 & b_0,\ b_1, & b_2,\ b_3, \ldots & b_n,\ 0, \ldots\ldots & 0 & \\
\hline
 & 0,\ a_0 & a_1,\ a_2,\ a_3, & \ldots a_n,\quad 0, \ldots & 0 & A_{2n-2} \\
B_4 & 0,\ b_0 & b_1,\ b_2,\ b_3, & \ldots b_n,\quad 0, \ldots & 0 & \\
\hline
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & A_{2n-4} \\
B_{2n-2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \\
\hline
 & 0,\ \ 0 & 0, \ldots\ldots & a_0,\ a_1, \ldots\ldots & a_n & A_2 \\
 & 0,\ \ 0 & 0, \ldots\ldots & b_0,\ b_1, \ldots\ldots & b_n &
\end{array} \right\|$$

матрицей полинома P_n и рассмотрим последовательность переходов $P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1$, даваемых редукцией пункта 7 в предположении, что при всех переходах величины, аналогичные b_1 при первом переходе, отличны от нуля (это ограничение сделано лишь ради упрощения). Для этого необходимо и достаточно, чтобы все $\operatorname{Det} B_{2t} \neq 0$. При преобразованиях $(2, \Delta > 0)$ все $\operatorname{Det} B_{2t}$ не меняют знака. Поэтому это имеет место и при первом преобразовании пункта 6, и если затем к $2j+1$-й ($j_n = 1, 2, \ldots$) строке прибавить $2j$-ю, умноженную на $\lambda_0 = -a_0/b_1$, то часть A_{2n-2} матрицы A_{2n} станет матрицей полинома P_{n-1}, причем корень $z = \infty$ отродится с левой или правой полуплоскости, в зависимости от знака $\delta_1 = \operatorname{Det} B_2$. При следующем переходе $P_{n-1} \to P_{n-2}$ сделаем такое же преобразование над матрицей A_{2n-2} и т. д. После $n-1$ переходов матрица A_{2n} преобразуется в матрицу, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю*.

Если среди величин $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ k отрицательных, то $P_n \subset \subset L_{2n-1}(k, 0, n-k)$. Согласно предыдущему, $\operatorname{sign} \delta_1 = \operatorname{sign} \operatorname{Det} B_2$, $\operatorname{sign} \delta_1\delta_2 = \operatorname{sign} \operatorname{Det} B_4, \ldots, \operatorname{sign} \delta_1\delta_2 \ldots \delta_n = \operatorname{sign} \operatorname{Det} B_{2n}$, откуда следует, что k равно числу перемен знака в ряде

$$1, \operatorname{Det} B_2, -\operatorname{Det} B_4, \ldots, (-1)^{n-1} \operatorname{Det} B_{2n}.$$

Пусть $P_{n-t} \subset L_{2n-1}(k, s, 0)$ и $k \neq 0$, тогда после первого преобразования величина, аналогичная b_1, отлична от нуля, и переход $P_{n-t} \to P_{n-t-1}$ осуществим; если же $k=0$, то после этого преобразования соответствующая таблица имеет вид $\begin{Bmatrix} a_0, \ldots, a_{n-t} \\ 0, \ldots, 0 \end{Bmatrix}$ и, следовательно, $\operatorname{Det} B_{2n-2t} = \ldots = \operatorname{Det} B_{2n} = 0$.

Аналогично в случае действительного полинома можно притти к критерию Раута — Гурвица (4).

Горьковский государственный
университет

Поступило
20 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Schur, ZAMM, 1, 307 (1921). [2] M. Benjaminovitch, Math. Z., 36, 501 (1933). [3] C. Hermite, Oeuvres, I, Paris, 1905, p. 397. [4] E. I. Routh, A Treatise on the Stability of Given State of Motion, 1877. [5] A. Hurwitz, Math. Ann., 46, 273 (1895). [6] E. Frank, Bull. Am. Math. Soc., 52, 144 (1946).

* Аналогичные неравенства получены E. Frank (6).