Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. МАРКОВ

НЕВОЗМОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИФМОВ В ТЕОРИИ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ. II

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 IV 1947)

1. В предыдущей заметке ([6]) мы утверждали доказуемость двух теорем неразрешимости: первая теорема устанавливала возможность построения ассоциативной системы с неразрешимой проблемой тождества, вторая теорема — возможность построения ассоциативной системы с разрешимой проблемой тождества, но неразрешимой проблемой делимости. В обеих теоремах речь шла об ассоциативных системах, определяемых конечными системами соотношений в некоторых алфавитах. Проблемы тождества и делимости понимались в смысле нахождения алгорифмов, распознающих тождество и, соответственно, делимость элементов ассоциативной системы, причем термин „алгорифм" применялся в смысле Church'a — Kleene'a — Turing'a. Под делимостью b на a понималась п р а в а я д е л и м о с т ь, т. е. разрешимость относительно x уравнения $x \times a = b$. В настоящей заметке мы уточняем эти результаты и указываем более простой способ их получения.

2. Мы будем исходить из теоремы Post'a ([2,3]), упоминавшейся в ([6]). В своей полной формулировке эта теорема утверждает следующее.

Может быть построена неразрешимая проблема следующего типа. Даны слова: H_0, G_i, G_i' $(i=1, \ldots, m)$ в алфавите A_0, состоящем из букв a, b. Каждому значению индекса i от 1 до m соотносим операцию над словами в A_0, применимую лишь к словам вида G_iP и переводящую всякое такое слово в слово PG_i'. Ищется алгорифм, посредством которого можно было бы для любого слова R в A_0 узнавать, переводимо ли H_0 в R конечной последовательностью этих операций.

Доказательство этой теоремы содержится в статьях Post'a ([2,4]) и Church'a ([1]).

3. С помощью теоремы Post'a теорема 2 предыдущей заметки доказывается в следующей уточненной формулировке.

Могут быть построены алфавит A_1, конечная система соотношений C_1 в A_1 и слово H_1 в A_1 таким образом, что будут соблюдены следующие условия.

D_1. В ассоциативной системе $\boldsymbol{S_1}$, определяемой системой соотношений C_1, разрешима проблема тождества, т. е. имеется алгорифм, посредством которого можно для любого соотношения A_1 узнавать, является ли оно следствием из C_1.

D_2. В ассоциативной системе $\boldsymbol{S_1}$ разрешима проблема левой делимости, т. е. имеется алгорифм, посредством которого можно для любых слов Q и R в A_1 узнавать, существует ли слово X в A_1 такое, что соотношение

$$QX \longleftrightarrow R$$

является следствием из C_1.

D_3. В ассоциативной системе S_1 неразрешима проблема правой делимости на произведение слова H_1, т. е. невозможен алгорифм, посредством которого можно было бы для любого слова R в A_1 узнавать, существует ли слово X в A_1 такое, что соотношение

$$XH_1 \longleftrightarrow R \tag{1}$$

является следствием из C_1.

Доказательство проводится следующим образом. Строятся слова H_0, G_i, G_i' $(i=1, \ldots, m)$ в алфавите A_0 согласно теореме Post'a. К A_0 присоединяются новые знаки: c, d, e_i $(i=1, \ldots, m)$, что дает искомый алфавит

$$A_1 = \{a, b, c, d, e_i \ (i=1, \ldots, m)\}.$$

В качестве C_1 берется следующая система соотношений в A_1:

$$C_1 \quad e_icG_i \longleftrightarrow ce_i, \quad e_ia \longleftrightarrow ae_i, \quad e_ib \longleftrightarrow be_i, \quad e_id \longleftrightarrow G_i'd \quad (i=1, \ldots, m).$$

В качестве H_1 берется слово cH_0d в A_1. Доказательство соблюдения условий D_1, D_2 и D_3 не представляет трудностей. В частности, D_3 вытекает из следующей легко доказуемой леммы.

Слово Q в A_0 тогда и только тогда преобразуемо в слово R в A_0 посредством последовательного применения операций Post'a, когда существует слово X в A_1 такое, что соотношение

$$XcQd \longleftrightarrow cRd$$

является следствием из C_1.

4. Теорема 1 предыдущей заметки допускает следующее уточнение.

Могут быть построены алфавит A_2 и конечная система соотношений C_2 в A_2 таким образом, что будет соблюдено условие:

I. В ассоциативной системе S_2, определяемой системой соотношений C_2, неразрешима проблема тождества единичному элементу, т. е. невозможен алгорифм, посредством которого можно было бы для любого слова R в A_2 узнавать, является ли соотношение

$$R \longleftrightarrow 0$$

следствием из C_2.

Доказательство проводится следующим образом. К алфавиту A_1 предыдущей теоремы присоединяются буквы f и g, что дает алфавит

$$A_3 = \{a, b, c, d, e_i \ (i=1, \ldots, m), f, g\}.$$

Система соотношений C_2 в A_2 получается присоединением к C_1 всех соотношений

$$\alpha H_1 g \longleftrightarrow H_1 g,$$

где α — любой знак из A_1, и соотношения

$$fH_1g \longleftrightarrow 0.$$

Доказывается следующая лемма.

Если R — слово в A_1, то для существования слова X в A_1 такого, чтобы соотношение (1) являлось следствием из C_1, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$fRg \longleftrightarrow 0$$

было следствием из C_2.

Из этой леммы в силу D_3 следует соблюдение условия *I*.

5. Полученные результаты не вполне конкретны в том отношении, что системы соотношений C_1, C_2 определяются словами H_0, G_i, G_i', причем ни сами эти слова, ни даже их число не даны в явной форме. Для полной конкретизации этих результатов мы могли бы воспользоваться конструкциями, предложенными в цитированных работах

Post'a и Church'a, что дало бы, однако, весьма громоздкие результаты. Мы предпочитаем другой путь, быстро приводящий к сравнительно простым системам соотношений.

6. Прежде всего мы покажем, что в теореме Post'a можно заменить систему необратимых преобразований

$$C_0 \qquad G_iP \vdash PG_i' \quad (i=1, \ldots, m)$$

системой обратимых преобразований

$$C_3 \qquad K_iP \perp PK_i' \quad (i=1, \ldots, n).$$

Здесь знак „$\vdash$" означает, что допускается преобразование слова, стоящего слева от него, в слово, стоящее справа от него, а знак „$\perp$" — что допускается как такое преобразование, так и обратное преобразование.

Может быть построена неразрешимая проблема следующего типа. Дан алфавит A_3, содержащий букву h, и дана конечная система C_3 обратимых преобразований слов в этом алфавите. Ищется алгорифм, посредством которого можно было бы для любого слова в A_3 узнавать, переводимо ли оно в h конечной последовательностью преобразований, входящих в C_3.

Эта теорема доказывается следующим образом. Алфавит A_3 получается присоединением буквы h к алфавиту A_2, т. е.

$$A_3 = \{a, b, c, d, e_i\,(i=1, \ldots, m), f, g, h\}.$$

Соответственно каждому соотношению

$$K \longleftrightarrow K',$$

входящему в C_2, устанавливается правило преобразования

$$KP \perp PK'.$$

Эти преобразования вместе с преобразованиями

$$\alpha P \perp P\alpha,$$

где α — любой знак из A_2, образуют систему C_3. Легко доказывается, что соотношение

$$Q \longleftrightarrow R,$$

где Q и R — слова в A_2, тогда и только тогда является следствием из C_2, когда Qh переводимо в Rh конечной последовательностью преобразований, входящих в C_3. Отсюда и следует, что A_3 и C_3 удовлетворяют формулированному в теореме условию неразрешимости.

В этой теореме алфавит A_3 может быть заменен алфавитом A_0 и буква h — буквой a. Для этого можно применить метод, близкий к тому, которым пользуется Post для таких редукций ([3]).

7. Опираясь на только что формулированный результат, легко доказать следующую теорему неразрешимости.

Пусть A_4 — алфавит, состоящий из букв a, b, c, d, e:

$$A_4 = \{a, b, c, d, e\}.$$

Установим следующее правило обратимых преобразований слов в A_4:

$$C_4 \qquad PdQcRdSeQT \perp PdQcRdSeTR,$$

где P, S, T — произвольные слова в A_4, Q и R — произвольные слова в A_0. Будем рассматривать слова в A_4 вида UeV, где U и V удовлетворяют следующим условиям:

R_1. V есть слово в A_0.

R_2. U не содержит e.

R_3. U начинается с d и оканчивается на d.

R_4. Между всякими двумя вхождениями c в U имеется по крайней мере одно вхождение d.

Такие слова будем называть **специальными**.

Невозможен алгорифм, посредством которого можно было бы для любого специального слова UeV узнавать, переводимо ли оно в слово Uea конечной последовательностью преобразований по правилу C_4.

Доказательство проводится с помощью следующей леммы.

Пусть L_i, L_i' $(i=1, \ldots, q)$, V, W — слова в A_0. Для того чтобы V было переводимо в W конечной последовательностью преобразований

$$L_iP \perp PL_i' \quad (i = 1, \ldots, q),$$

необходимо и достаточно, чтобы слово

$$dL_1cL_1'dL_2cL_2'd \ldots dL_qcL_q'deV$$

было переводимо в слово

$$dL_1cL_1'dL_2cL_2'd \ldots dL_qcL_q'deW$$

конечной последовательностью преобразований по правилу C_4.

8. С помощью предыдущей теоремы устанавливаются следующие результаты.

Пусть A_5 — алфавит, состоящий из первых 13 латинских букв:

$$A_5 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}.$$

Система соотношений:

$$C_5 \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta \longleftrightarrow \beta\alpha \quad (\alpha = a, b, c, d; \;\; \beta = h, i, j, k, l), \\ ek \longleftrightarrow ke, \quad el \longleftrightarrow le, \quad dh \longleftrightarrow df, \quad hd \longleftrightarrow gd, \quad ea \longleftrightarrow ie, \\ eb \longleftrightarrow je, \quad am \longleftrightarrow km, \quad bm \longleftrightarrow lm, \quad fc \longleftrightarrow cg, \\ fai \longleftrightarrow af, \quad fbj \longleftrightarrow bf, \quad agk \longleftrightarrow ga, \quad bgl \longleftrightarrow gb \end{array} \right.$$

в A_5 определяет ассоциативную систему с неразрешимой проблемой тождества. Если добавить к A_5 букву n и к C_5 соотношения

$$eam \longleftrightarrow nm, \quad \alpha n \longleftrightarrow n\alpha, \quad hn\alpha \longleftrightarrow hn \quad (\alpha = a, b, c, d),$$

то получится система соотношений C_6 в алфавите

$$A_6 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\},$$

определяющая ассоциативную систему, в которой неразрешима проблема тождества произвольного элемента элементу, выражаемому словом hnm.

Изложенными методами может быть также достигнута конкретизация самой теоремы Post'а, лежащей в основе настоящей работы.

Во время подготовки этой заметки к печати автору стало известно резюме работы Post'а ([5]), посвященной неразрешимости „проблемы Thue“. Как видно из этого резюме, рассматриваемая Post'ом проблема Thue есть не что иное, как проблема тождества в ассоциативной системе, определяемой конечной системой соотношений, причем Post'у удалось доказать возможность построения ассоциативной системы с неразрешимой проблемой тождества. Таким образом, Post'ом одновременно и независимо доказана теорема 1 нашей предыдущей заметки.

Поступило
21 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Church, J. Symb. Logic, 8 : 2, 50 (1943). [2] E. L. Post, Am. J. Math., 65, 197 (1943). [3] E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 50, 284 (1944). E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 52 : 4 (1946). [5] E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 52 : 11 (1946). [6] А. Марков, ДАН, 55, № 7 (1947).