Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

ГЕОФИЗИКА

В. А. БУЛИНСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ БОЛЬШОГО МАСШТАБА

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 31 I 1940)

Под атмосферными движениями большого масштаба мы подразумеваем движения масс воздуха, простирающихся на сотни километров по поверхности земли (например, циклоны и антициклоны). В настоящей статье дается способ вычисления вертикальных скоростей такого рода движений в случае, когда известна температура воздуха и задано распределение давления на поверхности земли.

Примем землю за плоскость и поместим на ее поверхности оси OX и OY прямоугольных декартовых координат, ось OY направим по меридиану, ось OZ вверх.

Введем обозначения: ρ—плотность воздуха, p—давление, T—температура, R—газовая постоянная, g—ускорение силы тяжести, u, v, w—проекции вектора скорости частицы воздуха на оси OX, OY и OZ соответственно, ω_x, ω_y, ω_z—проекции угловой скорости вращения земли на оси OX, OY и OZ.

Учтя, как обычно, что в задачах такого рода можно:

1) для координаты z уравнение движения заменить статическим;

2) ω_x, ω_y, ω_z—проекции угловой скорости вращения земли положить постоянными (предположение не принципиального характера);

3) пренебречь $w\omega_y$ по сравнению с $v\omega_z$ (это означает, что мы рассматриваем широты, достаточно удаленные от экватора);

4) пренебречь в уравнении неразрывности слагаемым $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Мы получим следующую систему уравнений, решающих поставленную задачу:

$$\rho v = \frac{1}{2\omega_z}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho}{2\omega_z}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\rho u = -\frac{1}{2\omega_z}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{2\omega_z}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$g\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}; \ p = \rho RT,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

$$T = T(x, y, z, t). \tag{1}$$

Порядок отдельных членов первых двух уравнений можно установить точно так же, как это делается в теории пограничного слоя и в теории длинных волн.

Поясним это только вкратце. Пусть v_s и v_h—характерные для данного явления горизонтальная и вертикальная скорости; l_s и l_h—его характерные горизонтальные и вертикальные размеры, t_0—характерное время.

Оценивая порядок («Ordnung» — обозначаем «O») членов, стоящих в первом уравнении системы (1), мы видим, что в среднем и при отсутствии поверхностей разрыва

$$O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=O\left(\frac{v_s}{t_0}\right);\ O\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=O\left(\frac{v_s^2}{l_s}\right);\ O\left(w\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)=O\left(\frac{v_h v_s}{l_h}\right)$$

(так как нужно переместиться на расстояние порядка характерной длины для того, чтобы произошло увеличение скорости на величину порядка характерной скорости).

Отсюда следует, что для задач рассматриваемого нами типа, характеризующихся малыми значениями $\frac{v_s}{t_0}$, $\frac{v_s}{l_s}$, $\frac{v_h}{l_h}$,

$$O(v)=O\left(\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\right). \qquad (2)$$

Аналогичные соотношения можно установить и для различных производных от v и u по координатам и времени.

Подставив вместо ρu и ρv в уравнение неразрывности правые части первого и второго уравнений системы (1), мы получим:

$$\frac{\partial\rho w}{\partial z}+\frac{\rho}{2\omega_z}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}+u\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}+v\,\frac{\partial\Omega}{\partial y}+w\,\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)+\frac{\Omega}{2\omega_z}\left(\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\omega_z}\left(\frac{\partial\rho w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial\rho w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\omega_z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2+v^2}{2}-\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{u^2+v^2}{2}\right)=0. \qquad (3)$$

Здесь $-\Omega=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$— вертикальная составляющая вихря.

Заменив в уравнении (3) на основании соотношения (2) u и v по формулам

$$u=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\ \text{ и }\ v=\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (4)$$

т. е. заменив все коэффициенты этого уравнения их приближенными значениями, мы приходим после этого при определении w к задаче Cauchy [дано уравнение (3) и задано $w|_{z=0}=0$].

Уравнение (3) содержит ряд второстепенных членов; оставляя главные, приходим к простому соотношению:

$$\frac{\partial\rho w}{\partial z}=-\frac{\rho}{2\omega_z}\frac{d\Omega}{dt}. \qquad (5)$$

(Здесь символ $\frac{d}{dt}$ обозначает индивидуальную производную.)

Формула (5) показывает, что в основном вертикальные скорости возникают за счет изменения интенсивности вихрей.

Использовав формулы (4), мы получаем из (5) для ρw явное выражение.

Мы приведем это выражение только для случая $T = T_0(x, y, t) - \gamma z$ (γ— постоянная, вертикальный температурный градиент):

$$\rho w = \exp\left[\frac{z}{4\omega_z^2}\left(\frac{g}{T_0}\Delta T_0 - \frac{R\gamma}{p_0}\Delta p_0\right)\right]\int\limits_0^z \rho\,(Az^2 + Bz +$$

$$+ C)\exp\left[\frac{z}{4\omega_z^2}\left(\frac{R\gamma}{p_0}\Delta p_0 - \frac{g}{T_0}\Delta T_0\right)\right]dz, \tag{6}$$

где

$$A = \frac{g^2}{8\omega_z^3 T_0^2} D(T_0, \Delta T_0) +$$

$$+ \frac{gR\gamma}{8\omega_z^3 p_0 T_0}\left[D(\Delta T_0, p_0) + D(\Delta p_0, T_0)\right] + \frac{R^2\gamma^2}{8\omega_z^3 p_0^2} D(p_0, \Delta p_0),$$

$$B = \frac{R\gamma}{4\omega_z^2}\left[\frac{g}{R\gamma T_0}\frac{\partial}{\partial t}\Delta T_0 - \frac{1}{p_0}\frac{\partial}{\partial t}\Delta p_0 + \frac{RT_0}{\omega} D(\Delta p_0, p_0) +\right.$$

$$\left. + \frac{g}{2\omega_z \gamma p_0}\Big(D(T_0, \Delta p_0) + D(p_0, \Delta T_0)\Big)\right],$$

$$C = \frac{R}{4\omega_z^2}\left[\frac{T_0}{p_0}\frac{\partial}{\partial t}\Delta p_0 + \frac{RT_0}{2\omega_z p_0^2} D(p_0, \Delta p_0)\right],$$

p_0 — значение давления на поверхности земли,
Δ — оператор Лапласа по переменным x и y,
D — якобиан по тем же переменным от величин, стоящих в круглых скобках за этим символом.

(При получении коэффициентов, при дифференцировании формул (4) T_0 и p_0 полагались постоянными; это дает погрешность менее одного процента.)

Полученные формулы могут быть приложены к исследованию вопросов, требующих знания вертикальных скоростей.

Покажем, например, как можно решить задачу о возникновении антициклональной температурной инверсии в адиабатической атмосфере.

Пусть

$$T = T_0 - \gamma z + \tau(x, y, z, t)$$

(τ— возмущающая функция, вызывающая инверсию);

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{\partial T_0}{\partial x}\right|;\ \left|\frac{\partial \tau}{\partial y}\right| \ll \left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right|;\ |\tau| \ll |T_0|,$$

но

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right| \approx \left|\frac{\partial T_0}{\partial t}\right| \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial \tau}{\partial z}\right| \approx \gamma.$$

До высоты, соответствующей τ_{max} (в том случае, конечно, если z не превосходит одного-двух километров), вид функции τ будет достаточно точно описываться уравнением

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + w\frac{\partial \tau}{\partial z} + (\gamma_a - \gamma)\,w = 0, \tag{7}$$

(γ_a — адиабатический температурный градиент).

После перехода через максимум при дальнейшем увеличении z уравнение (7) будет делаться все менее и менее точным.

Таким образом вычисление τ опять таки сводится к задаче Cauchy.

Для тех высот, на которых наиболее часто возникают инверсии (1—2 км от земли), формула (6) с точностью примерно до 10—15% может быть заменена нижеследующей:

$$w=\left(\frac{Bz}{2}+C\right)z. \tag{8}$$

Для случая стационарной (или близкой к стационарной) вертикальной скорости мы можем дать решение уравнения (7) в явной форме:

$$\tau=(\gamma-\gamma_a)\ (1-e^{-ct})\frac{\left(\frac{Bz}{2}+C\right)z}{(1-e^{-ct})\frac{Bz}{2}+C}. \tag{9}$$

Инверсия может иметь место, только если $B>0$, а $C<0$, причем

$$\tau_{\max}=(\gamma_a-\gamma)\ \frac{2C}{B}\,\mathrm{th}\,\frac{Ct}{4}. \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что антициклональная инверсия возникает лишь в том случае, если отношение C к B достаточно велико, величина же C определяет лишь скорость ее образования.

Главная геофизическая обсерватория
Ленинград

Поступило
7 II 1940