Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. Ф. ПАПКОВИЧ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

1° Решения Рибьера [1] и Файлона [2] позволяют загружать произвольным образом продольные кромки прямоугольной полосы. Имеемые элементарные решения позволяют приложить к поперечным кромкам полосы любой величины растягивающую силу, перерезывающую силу и изгибающие моменты. Для полного решения задачи о равновесии прямоугольной полосы достаточно поэтому найти лишь способ учета влияния таких нагрузок поперечных кромок полосы, которые уравновешиваются на каждой из этих кромок порознь. Как будет показано ниже, задача эта может быть решена методом Фурье.

2° В рассматриваемом случае функция Эри определяется дифференциальным уравнением

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0 \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm b, \tag{2}$$

а также

$$\left.\begin{aligned}
|\varphi|_{x=0} &= \int\limits_{-b}^{y}\int\limits_{-b}^{y} |X_x|_{x=0}\, dy^2 = F_1(y);\\
|\varphi|_{x=l} &= \int\limits_{-b}^{y}\int\limits_{-b}^{y} |X_x|_{x=l}\, dy^2 = F_2(y);\\
\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} &= -\int\limits_{-b}^{y} |Y_x|_{x=0}\, dy = G_1(y);\\
\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=l} &= -\int\limits_{-b}^{y} |Y_x|_{x=l}\, dy = G_2(y),
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем функции $F_i(y)$ и $G_i(y)$ можно считать заданными и удовлетворяющими граничным условиям

$$F_i(\pm b) = F_i'(\pm b) = G_i(\pm b) = G_i'(\pm b) = 0. \tag{4}$$

Это позволяет за общий интеграл для φ принять

$$\varphi = \sum_k \left\{ Y_k(y)\left(a_k e^{-\lambda_k x} + c_k{}^{-\lambda_k(l-x)}\right) + \overline{Y}_k(y)\left(\overline{a}_k e^{-\overline{\lambda}_k x} + \overline{c}_k e^{-\overline{\lambda}_k(l-x)}\right)\right\}, \tag{5}$$

где функции $Y_k(y)$, четные относительно y, определяются равенствами

$$Y_k(y) = \frac{\mathrm{Ch}\,(s_k y)}{\mathrm{Ch}\,(s_k b)} - \frac{(s_k y)\,\mathrm{Sh}\,(s_k y)}{(s_k b)\,\mathrm{Sh}\,(s_k b)} \tag{6}$$

и корнями уравнения

$$\mathrm{Sh}\,(2 s_k b) = -(2 s_k b), \tag{7}$$

нечетные же относительно y—равенствами

$$Y_k(y) = \frac{\mathrm{Sh}\,(s_k y)}{\mathrm{Sh}\,(s_k b)} - \frac{(s_k y)\,\mathrm{Ch}\,(s_k y)}{(s_k b)\,\mathrm{Ch}\,(s_k b)} \tag{8}$$

и корнями уравнения

$$\mathrm{Sh}\,(2 s_k b) = +(2 s_k b). \tag{9}$$

Через λ_k в равенстве (5) обозначены числа

$$\lambda_k = i s_k \tag{10}$$

вида

$$\lambda_k = +\beta_k - i\alpha_k,$$

где α_k и β_k реальны и положительны; через a_k и c_k—соответствующие комплексные постоянные произвольные, через же $(\bar{\ })$ величины, сопряженные с $(\ )$.

3° Подставляя (5) в (3), можно, пользуясь обозначениями

$$\left.\begin{aligned} a_k + c_k{}^{-\lambda_k l} &= Q_k, \\ a_k e^{-\lambda_k l} + c_k &= R_k \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned} L_1(y) &= 2\sum_k \{Y_k(y)\,\lambda_k\, c_k e^{-\lambda_k l} + \overline{Y}_k(y)\,\overline{\lambda}_k \overline{c}_k e^{-\overline{\lambda}_k l}\}, \\ L_2(y) &= 2\sum_k \{Y_k(y)\,\lambda_k\, c_k e^{-\lambda_k l} + \overline{Y}_k(y)\,\overline{\lambda}_k \overline{c}_k e^{-\overline{\lambda}_k l}\}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

переписать систему граничных условий (3) так:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \{Y_k(y)\,Q_k + \overline{Y}_k(y)\,\overline{Q}_k\} = F_1(y); \\ &\sum_k \{Y_k(y)\,R_k + \overline{Y}_k(y)\,\overline{R}_k\} = F_2(y); \\ &\sum_k \{Y_k(y)\,\lambda_k Q_k + \overline{Y}_k(y)\,\overline{\lambda}_k \overline{Q}_k\} = -G_1(y) + L_1(y); \\ &\sum_k \{Y_k(y)\,\lambda_k R_k + \overline{Y}_k(y)\,\overline{\lambda}_k \overline{R}_k\} = G_2(y) + L_2(y). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В равенствах (13) функции $F_i(y)$ и $Q_i(y)$ заданы, а $L_i(y)$, a_k и c_k подлежат определению.

Наименьшее из чисел $\beta_k \approx 4{,}21$. Это позволяет даже для квадратной полосы считать функции $L_i(y)$ весьма малыми по сравнению с $F_i(y)$ и $G_i(y)$ и разыскивать величины a_k и c_k методом весьма быстро сходящихся итераций, принимая для первого приближения $L_i(y)$ равными нулю и уточняя их выражения в последующих приближениях, по мере уточнения величин a_k и c_k.

Каждое из этих приближений требует двукратного разложения сразу двух заданных функций $F(y)$ и $G(y)$ в ряды вида

$$\left.\begin{aligned}\sum_k \{Y_k(y)\,P_k+\overline{Y}_k(y)\,\overline{P}_k\}&=F(y),\\ \sum_k \{Y_k(y)\,\lambda_k P_k+\overline{Y}_k(y)\,\overline{\lambda}_k\overline{P}_k\}&=G(y).\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

4° Для разыскания коэффициентов P_k в рядах (14) можно воспользоваться «ортогональностью» функций $Y_k(y)$, аналитически формулируемой равенствами *

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-b}^{+b}\{Y_k''(y)\,Y_n''(y)-s_k^2s_n^2\,Y_k(y)\,Y_n(y)\}\,dy=0\quad\text{при } k\neq n,\\ &\int_{-b}^{+b}\{Y_k''(y)\,\overline{Y}_n''(y)-s_k^2\overline{s}_n^2\,Y_k(y)\,\overline{Y}_n(y)\}\,dy=0\quad\text{при } k \text{ и } n \text{ любых},\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

легко выводимыми интегрированием по частям из дифференциальных уравнений

$$Y_k^{\mathrm{IV}}(y)-2s_k^2Y_k(y)+s_k^4Y_k(y)=0\tag{16}$$

и граничных условий $Y_k(\pm b)=Y_k'(\pm b)=0$, которым подчинены функции $Y_k(y)$.

Чтобы воспользоваться равенствами (15), введем в рассмотрение неизвестную пока функцию $H(y)$, определяемую зависимостью

$$\sum_k\{Y_k(y)\,s_k^2\,P_k+\overline{Y}_k(y)\,\overline{s}_k^2\,\overline{P}_k\}=H(y),\tag{17}$$

где P_k имеют те же значения, что и в (14).

Из уравнений (15) и (17) и первого из уравнений (14) следует, что

$$P_k=A_k-X_k,\tag{18}$$

где

$$A_k=\frac{1}{M_k}\int_{-b}^{+b}F''(y)\,Y_k''(y)\,dy,\tag{19}$$

$$M_k=\int_{-b}^{+b}\{(Y_k''(y))^2-s_k^4\,Y_k^2(y)\}\,dy\tag{20}$$

и

$$X_k=\frac{s_k^2}{M_k}\int_{-b}^{+b}H(y)\,Y_k(y)\,dy.\tag{21}$$

В равенствах (18) величины A_k можно считать заданными, ибо функция $F(y)$ предполагается известной. Величины X_k будут известны, если мы сумеем найти функцию $H(y)$.

5° Будем искать $H(y)$ в форме ряда

$$H(y)=\sum_n S_n\,Z_n(y),\tag{22}$$

* Найти эти свойства функций $Y_k(y)$ нам позволили некоторые соображения нашей статьи ([3]).

где S_n— неизвестные реальные постоянные, а $Z_n(y)$—совокупность таких реальных функций от y [удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и функции $Y_k(y)$], через которые можно выразить функцию $H(y)$, какова бы она ни была.

Из (22) и (21) следует

$$X_k = \sum_n \nu_{kn} S_n, \tag{23}$$

где

$$\nu_{kn} = \frac{s_k^2}{M_k} \int_{-b}^{+b} Z_n(y) \overline{Y}_k(y)\, dy; \tag{24}$$

из уравнений же (23), (18) и второго из равенств (14) можно получить для определения неизвестных S_n уравнение

$$A(y) = \sum_n S_n T_n(y), \tag{25}$$

где

$$A(y) = \sum_k \{Y_k(y) \lambda_k A_k + \overline{Y}_k(y) \overline{\lambda}_k \overline{A}_k\} - G(y) \tag{26}$$

и может почитаться заданной функцией от y, а

$$T_n(y) = \sum_k \{Y_k(y) \lambda_k \nu_{kn} + \overline{Y}_k(y) \overline{\lambda}_k \overline{\nu}_{kn}\} \tag{27}$$

и могут также считаться известными, если функции $Z_n(y)$ так или иначе выбраны.

6° Функции $Z_n(y)$ можно всегда подобрать так, чтобы функции $T_n(y)$ удовлетворяли условиям ортогональности, т. е. чтобы было

$$\int_{-b}^{+b} T_n(y) T_m(y)\, dy = 0, \quad \text{если } m \neq n. \tag{28}$$

Подобрав их указанным образом, можно все S_n определить приемом Фурье, что дает

$$S_n = \frac{\int_{-b}^{+b} A(y) T_n(y)\, dy}{\int_{-b}^{+b} T_n^2(y)\, dy}. \tag{29}$$

После этого все величины P_k находятся с помощью равенств (18) и (23) каждая порознь. Таким образом ни одна из итераций, требующихся для определения постоянных интегрирования a_k и c_k в общем интеграле для φ, не требует решения никаких бесконечных алгебраических систем и может быть легко выполнена.

Замкнутость полученного решения можно всегда проконтролировать путем проверки того, стремится ли интеграл

$$W = \int_{-b}^{+b} \left[A(y) - \sum_n S_n T_n(y) \right]^2 dy \tag{30}$$

при увеличении n к нулю или же к константе, отличной от нуля.

7° Изложенное решение позволяет произвести для прямоугольной полосы точную числовую оценку степени справедливости принципа Сен-Венана. Без всяких выкладок из него можно видеть, что местные напряжения, подчиняющиеся действию принципа Сен-Венана, уже на расстоянии от загруженной кромки, равном одному поперечнику полосы, уменьшаются примерно в 60 раз.

Изложенное решение может быть непосредственно использовано в теории изгиба тонких прямоугольных плит, две противоположные кромки которых жестко заделаны, две же другие устроены как угодно, и позволяет наметить некоторые такие пути решения бигармонической проблемы для прямоугольника, которые могут значительно облегчить решение этой проблемы для всякой области, конформно преобразуемой в прямоугольник. В частности, этим методом можно, повидимому, решить такую важную техническую задачу, как задача об изгибе полукруглых турбинных диафрагм, опертых лишь по наружному краю.

Возможно, что после соответствующих обобщений изложенный метод окажется применимым к решению задачи о равновесии призматического стержня, произвольным образом загруженного на торцах и свободного от нагрузки на боковой поверхности, т. е. к решению задачи, сформулированной сорок лет тому назад Альманси ([4]), но до сих пор не решенной. Он должен дать также весьма существенные упрощения в решении проблемы Ламе ([5]) о равновесии прямоугольной призмы, все шесть граней которой загружены нормальными напряжениями произвольно, а может быть, даже и более общей проблемы о равновесии прямоугольной призмы, совершенно произвольно загруженной.

Поступило
25 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. C. Ribière, Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles, Bordeaux (1899), а также C.R., **126**, p. 402, 1190. [2] L. N. G. Filon, Phyl. Trans. Roy. Soc., A. Series, vol. 201, p. 63 (1903). [3] П. Ф. Папкович, Изв. Ленинград. политехн. ин-та (1929). [4] E. Almansi, Rendiconti Acc. Lincei, Roma, 6 ser., **10**, p. 333, 400 (1901). [5] G. Lamé, Théorie de l'élasticité des corps solides, лекция 12 (1852).