Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ РАЗРЕЗОВ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 31 I 1940)

Пусть плоскость $z=x+iy$ имеет n разрезов γ_{2k-1} $(k=1,\ldots,n)$ вдоль действительной оси. Верхний и нижний берега разреза γ_{2k-1} обозначим через $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ и $\gamma_{2k-1}^{(2)}$ и положим $L_1=\sum\limits_1^n \gamma_{2k-1}^{(1)}$. Остальную часть вещественной оси обозначим через L_2 и условимся обход L_1 и L_2 считать совпадающим с положительным относительно верхней полуплоскости обходом действительной оси. Наконец, концы отрезков $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ обозначим через a_{2k-1} и a_{2k} $(k=1,\ldots,n)$.

1° Предположим, что требуется определить функцию $\varphi(z)$, регулярную вне указанных разрезов и равную нулю на бесконечности, при условии, что на верхнем и нижнем берегах разрезов заданы соответственно ее вещественная часть g_1 и мнимая g_2.

Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ (где $t=x$— аффикс точки границы) обозначают предельные значения $\varphi(z)$ соответственно на верхнем и нижнем берегах разрезов. Введем две вспомогательные функции

$$\omega_1(t)=\frac{i\varphi_1(t)+\overline{\varphi_2(t)}}{2},\quad \omega_2(t)=\frac{i\varphi_1(t)-\overline{\varphi_2(t)}}{2},\tag{1}$$

являющиеся, очевидно, предельными значениями некоторых регулярных в верхней полуплоскости функций $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$.

На L_1 мнимые части функций $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ равны

$$\frac{g_1-g_2}{2}\quad\text{и}\quad\frac{g_1+g_2}{2}.$$

На L_2, где $\varphi(z)$ имеет одинаковые предельные значения сверху и снизу, вещественная и мнимая части функции $\omega_1(z)$ равны между собою, а у функции $\omega_2(z)$ отличаются знаком. Поэтому на действительной оси будем иметь:

$$\delta_1\omega_1(t)+\overline{\omega_1(t)}=g_1^{(0)},\quad \delta_2\omega_2(t)+\overline{\omega_2(t)}=g_2^{(0)},\tag{2}$$

где

$$\delta_1,\ \delta_2=\begin{cases}-1, & -1 \text{ на } L_1,\\ i, & -i \ \text{»}\ L_2;\end{cases}$$

$$g_1^{(0)},\ g_2^{(0)}=\begin{cases}-i(g_1-g_2), & -i(g_1+g_2) \text{ на } L_1,\\ \quad 0\quad, & \quad 0 \quad \text{»}\ L_2.\end{cases}\tag{3}$$

Умножим каждое из равенств (2) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где z — произвольная точка верхней полуплоскости, и проинтегрируем по всей действительной оси. Воспользовавшись предварительно теоремой Коши для регулярных функций $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$, перейдем затем к пределу, устремляя z к точке t_0 на L_1. Найдем:

$$\frac{i-1}{2}\,\omega_1(t_0)-\frac{1+i}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt=\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_1^{(0)}}{t-z}\,dt, \tag{4}$$

$$-\frac{i+1}{2}\,\omega_2(t_0)-\frac{1-i}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt=\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_2^{(0)}}{t-z}\,dt. \tag{5}$$

Используя для решения этих уравнений известный прием Карлемана ([1]), после очевидных обобщений и некоторых преобразований получим:

$$\omega_1(z)=-\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-z}{a_{2k}-z}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-t}{a_{2k-1}-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{g_1^{(0)}}{t-z}\,dt+\omega_1^{(0)}(z),$$

$$\omega_2(z)=-\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{g_2^{(0)}}{t-z}\,dt+\omega_2^{(0)}(z),$$

где

$$\omega_1^{(0)}(z)=\frac{A_0+A_1z+\ldots+A_{n-1}z^{n-1}}{\prod\limits_1^n(a_{2k}-z)^{\frac{1}{4}}(a_{2k-1}-z)^{\frac{3}{4}}},$$

$$\omega_2^{(0)}(z)=\frac{B_0+B_1z+\ldots+B_{n-1}z^{n-1}}{\prod\limits_1^n(a_{2k}-z)^{\frac{3}{4}}(a_{2k-1}-z)^{\frac{1}{4}}},$$

а A_k, B_k — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям *:

$$A_k+i\overline{A_k}=0,\quad B_k-i\overline{B_k}=0.$$

При этом под $\prod\limits_1^n\left(\frac{a_{2k}-t}{a_{2k-1}-t}\right)^{\frac{1}{4}}$ следует понимать предельное значение $\prod\limits_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\frac{1}{4}}$ на верхнем берегу разрезов.

Наконец, возвращаясь к равенству (1), найдем следующее выражение для искомой функции:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\frac{1}{4}}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{g_1+g_2}{t-z}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-z}{a_{2k}-z}\right)^{\frac{1}{4}}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-t}{a_{2k-1}-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{g_1-g_2}{t-z}\,dt+\varphi_0(z), \tag{6}$$

где

$$\varphi_0(z)=-i\,\{\omega_1^{(0)}(z)+\omega_2^{(0)}(z)\}.$$

* В последнем легко убедиться непосредственно из равенств (2).

2° Перейдем теперь к соответствующей задаче теории упругости. Пусть на верхних берегах разрезов заданы внешние силы, а на нижних берегах заданы смещения. Как известно (2), задача в этом случае сводится к определению двух регулярных вне разрезов функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из предельных условий:

$$\delta\varphi(t)+\overline{\chi(t)}=f \text{ на } \gamma_{2k-1}(k=1,\ldots,n), \tag{7}$$

где $\delta=1$ на $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ и $\delta=-\varkappa$ на $\gamma_{2k-1}^{(2)}$ ($\varkappa$—упругая постоянная), функция $\chi(z)=z\varphi'(z)+\psi(z)$, $f=f_1$ на $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ и $f=f_2$ на $\gamma_{2k-1}^{(2)}$, причем f_1 и f_2 определяются по заданным внешним силам и смещениям. Главный вектор внешних сил, действующих на берегах каждого разреза, будем считать равным нулю. Кроме того будем считать $\varphi(\infty)=\chi(\infty)=0$, так как постоянные, в которые, вообще говоря, обращаются на бесконечности функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, всегда можно выделить.

Через $\varphi_1(t)$, $\chi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $\chi_2(t)$ будем обозначать предельные значения функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ на верхнем и нижнем берегах разрезов.

Умножим обе части равенства (7) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где z—произвольная точка верхней полуплоскости, и проинтегрируем по сумме разрезов $\sum\limits_1^n \gamma_{2k-1}$. Получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_1(t)}{t-z}dt+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_2(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{\chi_1(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{\chi_2(t)}}{t-z}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f_1-f_2}{t-z}dt. \tag{8}$$

Так как $\chi(z)$ имеет на L_2 одинаковые предельные значения сверху и снизу, то

$$\lim_{z\to t_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{\chi_1(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{\chi_2(t)}}{t-z}dt\right\}=$$

$$=-\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\chi_2(t)}}{t-z}dt=-\overline{\chi_2(t_0)}. \tag{9}$$

По теореме Коши имеем:

$$\varphi_1(t_0)-\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_1(t)}{t-z}dt+\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_2(t)}{t-z}dt=0. \tag{10}$$

Перейдем теперь в равенстве (8) к пределу, устремляя z к точке t_0 на L_1. С помощью (7), (9) и (10) полученное равенство может быть преобразовано к виду:

$$-\varkappa\{\varphi_1(t_0)+\varphi_2(t_0)\}+\lim_{z\to t_0}\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_1(t)}{t-z}dt=$$

$$=f_2+\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f_1-f_2}{t-z}dt. \tag{11}$$

Задача свелась, таким образом, к решению системы (10) и (11). Введем обозначения:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_1(t)}{t-z}dt,\ \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_2(t)}{t-z}dt \tag{12}$$

и положим:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= e^{\psi_1(z)} F_1(z) + e^{\psi_2(z)} F_2(z), \\ \Phi(z) &= e^{\psi_1(z)} \Phi_1(z) + e^{\psi_2(z)} \Phi_2(z), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $\psi_1(z), \ldots, \Phi_2(z)$ —некоторые неизвестные пока регулярные функции.

Далее, предположим, что

$$\left.\begin{aligned} e^{\psi_1(t+i0)} &= m_1 e^{\psi_1(t-i0)}, \\ e^{\psi_2(t+i0)} &= m_2 e^{\psi_2(t-i0)}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $\psi_1(t+i0), \ldots, \psi_2(t-i0)$ суть предельные значения соответствующих функций при стремлении к L_1 сверху и снизу, а m_1 и m_2— некоторые постоянные.

Уравнения (10) и (11) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{\psi_1(t-i0)} &[m_1\{F_1(t+i0) - \varkappa\Phi_1(t+i0)\} + \varkappa\{F_1(t-i0) + \Phi_1(t-i0)\}] + \\ + e^{\psi_2(t-i0)} &[m_2\{F_2(t+i0) - \varkappa\Phi_2(t+i0)\} + \varkappa\{F_2(t-i0) + \Phi_2(t-i0)\}] = \\ &= f_2 + \lim_{z\to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{f_1 - f_2}{t - z} dt, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} e^{\psi_1(t-i0)} \{m_1\Phi_1(i+i0) - F_1(t-i0)\} + e^{\psi_2(t-i0)} \{m_2\Phi_2(t+i0) - \\ - F_2(t-i0)\} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ определим через $F_1(z)$ и $F_2(z)$ из соотношений:

$$m_1\{F_1(z) - \varkappa\Phi_1(z)\} = -\varkappa\{F_1(z) + \Phi_1(z)\},$$

$$m_2\{F_2(z) - \varkappa\Phi_2(z)\} = -\varkappa\{F_2(z) + \Phi_2(z)\}.$$

Подставим в (16) вместо $\Phi_1(t+i0)$, $\Phi_2(t+i0)$ их выражения через $F_1(t+i0)$, $F_2(t+i0)$ и определим постоянные m_1 и m_2 таким образом, чтобы коэффициенты при $F_1(t+i0)$ и $F_2(t+i0)$ в новом равенстве равнялись единице. Взяв различные значения корней полученного для m_1 и m_2 квадратного уравнения, будем иметь:

$$m_1 = \sqrt{\varkappa}\, e^{\frac{i\pi}{2}}, \quad m_2 = \sqrt{\varkappa}\, e^{-\frac{i\pi}{2}}. \tag{17}$$

После этого равенства (15) и (16) примут вид: *

$$\begin{aligned} -\frac{m_1(1+\varkappa)}{(m_1-1)} e^{\psi_1(t-i0)} \{F_1(t+i0) - F_1(t-i0)\} - \\ -\frac{m_2(1+\varkappa)}{(m_2-1)} e^{\psi_2(t-i0)} \{F_2(t+i0) - F_2(t-t0)\} = \\ = f_2 + \lim_{z\to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{f_1 - f_2}{t - z} dt. \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} e^{\psi_1(t-i0)} \{F_1(t+i0) - F_1(t-i0)\} + \\ + e^{\psi_2(t-i0)} \{F_2(t+i0) - F_2(t-i0)\} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

На основании формул (14), (17) и (18), (19) найдем сначала $\psi_1(t+i0) - \psi_1(t-i0), \ldots, F_2(t+i0) - F_2(t-i0)$, а затем и функции $\psi_1(z), \ldots, F_2(z)$, выразив их через интегралы типа Коши. Возвращаясь

---

* Таким образом можно пытаться решать систему любого конечного числа сингулярных уравнений вида (10), (11) с постоянными коэффициентами.

после этого к одному из равенств (10), (11), найдем после некоторых вычислений следующее выражение для искомой функции:

$$\varphi(z)=\frac{1}{4\pi\sqrt{\varkappa}}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\theta_1}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta_1}\frac{f_2-i\sqrt{\varkappa}f_1}{t-z}\,dt-$$

$$-\frac{1}{4\pi\sqrt{\varkappa}}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\theta_2}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta_2}\frac{f_2+i\sqrt{\varkappa}f_1}{t-z}\,dt, \qquad (20)$$

где

$$\theta_1=\frac{1}{4\pi i}\lg\varkappa+\frac{1}{4},\quad \theta_2=\frac{1}{4\pi i}\lg\varkappa-\frac{1}{4}.$$

К правой части уравнения (20) следует еще прибавить решение однородной системы, которую получим, положив в уравнениях (10) и (11) свободный член равным нулю. Это решение, которое обозначим через $\varphi_0(z)$, может быть (так же как в случае 1°) легко найдено из следующих соображений. Для функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$, соответствующих этому случаю, будем иметь:

$$F_1(t+i0)-F_1(t-i0)=0,\ F_2(t+i0)-F_2(t-i0)=0.$$

Отсюда следует, что функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ однозначны в плоскости и могут иметь особенности лишь в точках a_{2k-1} и a_{2k} $(k=1,\ldots,n)$. Ограничимся рассмотрением абсолютно интегрируемых решений. Тогда [учитывая вид функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, см. (13)] нетрудно видеть, что $F_1(z)$ и $F_2(z)$ могут иметь лишь полюсы первого порядка соответственно в точках a_{2k} и a_{2k-1} $(k=1,\ldots,n)$. Поэтому

$$\varphi_0(z)=\frac{A_0+A_1z+\ldots+A_{n-1}z^{n-1}}{\prod\limits_1^n(a_{2k-1}-z)^{\theta_1}(a_{2k}-z)^{1-\theta_1}}+$$

$$+\frac{B_0+B_1z+\ldots+B_{n-1}z^{n-1}}{\prod\limits_1^n(a_{2k}-z)^{-\theta_2}(a_{2k-1}-z)^{1+\theta_2}},$$

где A_k и B_k $(k=0,1,\ldots,n-1)$—произвольные постоянные.

Зная $\varphi(z)$, легко найдем функцию $\psi(z)$. Этим исчерпывается решение задачи.

Сейсмологический институт
Академия Наук СССР

Поступило
7 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carlemann, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, t. 16.
[2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости (1935).