Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ДИСКРЕТНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 III 1940)

Пусть G — произвольная дискретная (абстрактная) коммутативная группа. Комплексную функцию $f(g)$, заданную на этой группе, будем называть *положительно определенной*, если для любых элементов $h_1, \ldots, h_m$ группы G $(m = 1, 2, \ldots)$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ выполняется неравенство

$$\sum_{i, j=1}^{m} f(h_i - h_j) \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{1}$$

В настоящей заметке дается решение задачи о представлении произвольной, положительно определенной функции, заданной на дискретной коммутативной группе.

Характером дискретной коммутативной группы G, как известно, называется всякое гомоморфное отображение χ этой группы в мультипликативную группу комплексных чисел, по модулю равных единице, так что определяемая им комплексная функция $\chi(g) = (\chi, g)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$(\chi, g-h) = (\chi, g)\overline{(\chi, h)}. \tag{2}$$

Пусть χ_1 и χ_2 — два характера группы G. Тогда формула

$$(\chi_1 - \chi_2, g) = (\chi_1, g)\overline{(\chi_2, g)} \tag{3}$$

определяет характер $\chi_1 - \chi_2$. Множество X характеров группы G мы будем называть *достаточной группой* характеров группы G, если, во-первых, X есть группа относительно операции вычитания (3) и, во-вторых, если $(\chi, g) = 1$ для всех $\chi \in \mathrm{X}$ лишь при $g = 0$, так что для каждого $g \neq 0$ существует такой характер $\chi \in \mathrm{X}$, что

$$(\chi, g) \neq (\chi, 0). \tag{4}$$

Как известно, путем индукции можно показать, что всякая дискретная коммутативная группа обладает достаточными группами характеров.

Если X — некоторая достаточная группа характеров группы G, то, в силу (2) и условия (4), G в свою очередь есть (достаточная) группа характеров группы X. Функции $(\chi, g) = g(\chi)$ являются почти периодическими на X [1]. В силу достаточности группы X,

$$M\{g(\chi)\overline{h(\chi)}\} = 0 \quad \text{при} \quad g \neq h, \tag{5}$$

где $M\{\varphi(\chi)\}$ есть среднее значение почти периодической функции $\varphi(\chi)$ [1]. Обозначим через $B_G(\mathrm{X})$ совокупность всех (почти периодических) полиномов

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \dot{g}_k(\chi) = \sum_{k=1}^{n} c_k (\chi, g_k) \tag{6}$$

($g_k \in G$, c_k — комплексные числа, $n=1, 2, \ldots$) и через $\overline{B}_G(\mathrm{X})$ совокупность почти периодических функций на X, являющихся пределами последовательностей полиномов (6), равномерно сходящихся на X. $\overline{B}_G(\mathrm{X})$ образует пространство Банаха с нормой $\|\varphi(\chi)\| = \sup|\varphi(\chi)|$.

Линейный функционал $L\{\varphi(\chi)\}$, определенный на пространстве $\overline{B}_G(\mathrm{X})$, мы будем называть *позитивным*, если $L\{\varphi(\chi)\} \geqslant 0$, когда $\varphi(\chi) \geqslant 0$ для всех $\chi \in \mathrm{X}$.

Теорема 1. *Всякая положительно определенная функция $f(g)$, заданная на дискретной коммутативной группе G, представима в виде*

$$f(g) = L\{g(\chi)\}, \tag{7}$$

где L—некоторый линейный (однородный и ограниченный) позитивный функционал на пространстве $\overline{B}_G(\mathrm{X})$ почти периодических функций, определяемых группой G в какой-нибудь ее достаточной группе характеров X, причем $\|L\| = f(0)$.

Обратно, для всякого линейного позитивного функционала L на $\overline{B}_G(\mathrm{X})$ функция (7) является положительно определенной.

Справедливость последнего утверждения теоремы проверяется непосредственно. Для доказательства первой части теоремы определим сначала функционал L на множестве $B_G(\mathrm{X})$, именно, положим

$$L\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k\, g_k(\chi)\right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k f(g_k). \tag{8}$$

Это определение однозначно, так как, в силу (5), два полинома из $B_G(\mathrm{X})$ совпадают всюду на X, лишь если совпадают совокупности их показателей g_k и соответствующие коэффициенты c_k.

Однородность функционала L (на $B_G(\mathrm{X})$) очевидна. Что касается его позитивности и ограниченности (с оценкой $|L\{\varphi(\chi)\}| \leqslant f(0)\sup|\varphi(\chi)|$), то нетрудно показать, что каждое из этих свойств, в соединении с равенством $L\{1\} = L\{(\chi, 0)\} = f(0)$, вытекающим из (8), влечет за собой другое. Однако мы докажем оба эти свойства независимо одно от другого и тем самым дадим два варианта доказательства теоремы 1.

Позитивность. Пусть $P(\chi) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, g_k(\chi) \geqslant 0$ для всех $\chi \in \mathrm{X}$. Положим $c(g) = M\{P(\chi)\overline{g(\chi)}\}$. $c(g)$ равна нулю для всякого g, не совпадающего ни с одним из g_k, $k=1, \ldots, n$, а $c(g_k) = c_k$. Так как, по условию, $P(\chi) \geqslant 0$, то $c(g)$ есть положительно определенная функция. Далее, $d(g) = c(g)f(g)$, как произведение двух положительно определенных функций, также есть положительно определенная функция [см. ([2]), стр. 14]. С другой стороны, $d(g)$ может быть отлична от нуля лишь для $g = g_1, \ldots, g_n$. Таким образом нам нужно доказать, что сумма значений положительно определенной функции, отличной от нуля лишь в конечном числе точек, взятая по всем этим точкам, неотрицательна.

Пусть G' — подгруппа группы G, построенная на тех элементах $g_1, \ldots, g_n \in G$, в которых $d(g)$ может быть отлична от нуля. Как коммутативная группа с конечным числом образующих, G' разлагается в прямую сумму свободных циклических групп с образующими $x_1, \ldots, x_r$ и конечных циклических групп с образующими $y_1, \ldots, y_s$, порядков соответственно $\tau_1, \ldots, \tau_s$. Пусть τ — какое-нибудь натуральное число, делящееся на все τ_k, $k=1, \ldots, s$, и N — произвольное натуральное число. Беря в форме $\sum_{i,j} d(h_i - h_j)\,\xi_i\,\overline{\xi}_j$ в качестве h_i все элементы из G' вида

$n_1 x_1 + \ldots + n_r x_r + n_{r+1} y_1 + \ldots + n_{r+s} y_s$, где n_k $(k = 1, \ldots, r+s)$ независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до $N\tau$, и полагая все ξ_i равными 1, получаем после некоторых промежуточных выкладок:

$$0 \leqslant \frac{\tau_1 \ldots \tau_s}{(N\tau)^{r+2s}} \sum_{i,j=1}^{(N\tau)^{r+s}} d(h_i - h_j) \xi_i \bar{\xi}_j =$$

$$= \sum_{p_1=-N\tau}^{N\tau-1} \ldots \sum_{p_r=-N\tau}^{N\tau-1} \sum_{p_{r+1}=0}^{\tau_1-1} \ldots \sum_{p_{r+s}=0}^{\tau_s-1} d(p_1 x_1 + \ldots + p_{r+s} y_s) \left(1 - \frac{|p_1|}{N\tau}\right) \ldots \left(1 - \frac{|p_r|}{N\tau}\right).$$

Так как все значения аргумента $p_1 x_1 + \ldots + p_{r+s} y_s$, входящие в сумму, различны, а $d(p_1 x_1 + \ldots + p_{r+s} y_s)$ может быть отлична от нуля только для конечного числа $p_1, \ldots, p_r$, то, беря $N \to \infty$, мы получим в пределе требуемое неравенство $0 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} d(g_k)$.

Ограниченность. Нам нужно показать, что для всякого полинома $P(\chi) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k(\chi)$ выполняется неравенство

$$|L\{P(\chi)\}| \leqslant f(0) \sup |P(\chi)| \tag{9}$$

[равенство достигается при $P(\chi) = (\mathrm{X}, 0)$].

Лемма 1. *Если $f(g)$ — положительно определенная функция, то $f(0) \geqslant 0$, $f(-g) = \overline{f(g)}$, $|f(g)| \leqslant f(0)$ для всех $g \in G$.*

Лемма 2. *Если форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} f_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$ вещественна и неотрицательна для всех комплексных значений ξ, то для любых комплексных ξ, η выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \xi_i \bar{\eta}_j \right|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} \eta_i \bar{\eta}_j.$$

Лемма 3. *Для любых полиномов $P(\chi)$, $Q(\chi)$ выполняется неравенство*

$$|L\{P(\chi) Q(\chi)\}|^2 \leqslant L\{|P(\chi)|^2\} L\{|Q(\chi)|^2\}.$$

В частности,

$$|L\{P(\chi)\}|^2 \leqslant f(0) L\{|P(\chi)|^2\}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $P(\chi) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k(\chi)$, $Q(\chi) = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k g_k(\chi)$ (мы можем объединить показатели обоих полиномов, положив, в случае надобности, некоторые коэффициенты равными нулю). На основании леммы 2 имеем:

$$|L\{P(\chi) \overline{Q(\chi)}\}|^2 = \left| L\left\{ \sum_{k,l=1}^{n} c_k \bar{d}_l (\chi, g_k - g_l) \right\} \right|^2 = \left| \sum_{k,l=1}^{n} f(g_k - g_l) c_k \bar{d}_l \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,l=1}^{n} f(g_k - g_l) c_k \bar{c}_l \sum_{k,l=1}^{n} f(g_k - g_l) d_k \bar{d}_l = L\{|P(\chi)|^2\} L\{|Q(\chi)|^2\}.$$

Лемма 4. *Если полином $P(\chi)$ содержит n членов, то*

$$|L\{P(\chi)\}| \leqslant \sqrt{n} f(0) \sup |P(\chi)|.$$

Доказательство. Пусть $P(\chi)=\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(\chi)$. Применяя неравенство Шварца и принимая во внимание лемму 1, получаем:

$$|L\{P(\chi)\}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \sum_{k=1}^{n}|f(g_k)|^2 \leqslant nf^2(0)\, M\{|P(\chi)|^2\} \leqslant nf^2(0) \sup|P(\chi)|^2.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству неравенства (9). Повторно применяя неравенство (10), получаем:

$$|L\{P(\chi)\}| \leqslant f(0)^{1-2^{-m}} L\{|P(\chi)|^{2^m}\}^{2^{-m}} \quad (m=1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Пусть полином $Q(\chi)=|P(\chi)|^2$ имеет N членов. Тогда полином $|P(\chi)|^{2^m}=$ $=Q(\chi)^{2^{m-1}}$ имеет не более $\binom{N+2^{m-1}-1}{2^{m-1}}$ членов [(3), стр. 60]. Применяя неравенство леммы 4 к правой части неравенства (11), получаем:

$$|L\{P(\chi)\}| \leqslant f(0)\binom{N+2^{m-1}-1}{2^{m-1}}^{2^{-m-1}} \sup|P(\chi)|. \tag{12}$$

Но, как нетрудно видеть, величина $\binom{N+2^{m-1}-1}{2^{m-1}}^{2^{-m-1}}$ при $m \to \infty$ стремится к 1. Поэтому, беря в (12) $m \to \infty$, мы получим в пределе требуемое неравенство (9).

Таким образом (двумя способами) доказано, что L есть линейный позитивный функционал на $B_G(X)$. По непрерывности он распространяется на $\overline{B}_G(X)$, оставаясь при этом, как нетрудно видеть, линейным и позитивным. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть X — группа всех характеров дискретной коммутативной группы G, причем в X введена бикомпактная топология* [4]. *Тогда всякая положительно определенная функция $f(g)$, заданная на G, представима, и притом единственным образом, в виде*

$$f(g)=\int_X g(\chi) F(\Delta_\chi), \tag{13}$$

где $F(\Delta)$ — вполне аддитивная, неотрицательная и непрерывная сверху функция множеств на X.

Доказательство. Функции $g(\chi)$ непрерывны в топологическом пространстве X, а G есть группа всех непрерывных характеров группы X [4]. Поэтому $\overline{B}_G(X)$ есть пространство всех непрерывных и ограниченных функций на X, и мы получаем для $f(g)$ представление (13), так как всякий линейный позитивный функционал в пространстве всех непрерывных функций, заданных на нормальном компактном пространстве, представляется, и притом единственным образом, в виде интеграла Стильтьеса относительно некоторой вполне аддитивной неотрицательной и непрерывной сверху функции множеств этого пространства [5].

Следующую теорему можно рассматривать как двойственную к теореме 2:

Теорема 3. *Пусть X — бикомпактная коммутативная группа и G — группа всех ее непрерывных характеров. Всякая непрерывная, положительно определенная функция $f(\chi)$, заданная на X, разлагается по характерам $g(\chi)$, $g \in G$, в ряд с неотрицательными коэффициентами. Этот ряд абсолютно сходится, как ряд с неотрицательными коэффициентами, порождаемый непрерывной функцией* *.

* Последнее утверждение представляет собой обобщение известной теоремы об абсолютной сходимости ряда Фурье почти периодической функции Бора с неотрицательными коэффициентами [см. [6], стр. 52].

Доказательство. Пусть $f(\chi) \sim \sum c_k g_k(\chi)$. С помощью одного приема, принадлежащего Ф. Риссу [(7), стр. 188], можно показать, что $\int\int f(\xi-\eta)\varphi(\xi)\overline{\varphi(\eta)}\,d\xi\,d\eta \geqslant 0$ для любой непрерывной функции $\varphi(\xi)$, $\xi \in X$. В частности,

$$c_k = \int f(\xi)\overline{g_k(\xi)}\,d\xi = \int\int f(\xi-\eta)\overline{g_k(\xi)}\,g_k(\eta)\,d\xi\,d\eta \geqslant 0 \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Далее, полагая $R_n(\xi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k g_k(\chi)$, имеем $\int |R_n(\xi)|^2 d\xi \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$,

поэтому $$\int\int f(\xi-\eta)\varphi(\xi)\overline{\varphi(\eta)}\,d\xi\,d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left|\int \varphi(\xi)\,g_k(\xi)\,d\xi\right|^2,$$

и $$\int\int\left\{f(\xi-\eta) - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(\xi-\eta)\right\}\varphi(\xi)\overline{\varphi(\eta)}\,d\xi\,d\eta \geqslant 0$$

для любого n и любой непрерывной функции $\varphi(\xi)$. Отсюда следует, что $f(0) \geqslant \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(0)$ $(n=1, 2, \ldots)$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(\chi)$ абсолютно сходится. Приведем в заключение два примера.

Пример 1. Пусть G — аддитивная группа вещественных чисел $\{\lambda\}$. Достаточной группой характеров для нее может служить такая же аддитивная группа вещественных чисел $\{x\}$, с определением $(\lambda, x) = e^{i\lambda x}$. Таким образом каждая положительно определенная функция на прямой $\{\lambda\}$ может быть представлена в виде $f(\lambda) = L\{e^{i\lambda x}\}$, где L — линейный позитивный функционал в пространстве почти периодических функций Бора*. Существуют измеримые, но не непрерывные положительно определенные функции на прямой [(7), стр. 187]. Существуют и неизмеримые положительно определенные функции. Такою является, например, функция $e^{i\varphi(\lambda)}$, где $\varphi(\lambda)$ — неизмеримое решение функционального уравнения $\varphi(\lambda+\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$ (8, 9, 10).

Пример 2. Пусть G — аддитивная группа целых чисел. Группа X всех ее характеров есть группа классов вычетов по модулю 2π, и мы получаем теорему Herglotz'a (11): *всякая положительно определенная последовательность* c_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *представима в виде*

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{inx}\,d\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ — *некоторая неубывающая функция с ограниченным изменением (равным* c_0*).*

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР

Поступило
4 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934). [2] J. Schur, Journ. f. d. reine u. angew. Math., 140 (1911). [3] E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, Leipzig (1901). [4] E. R. van Kampen, Ann. of Math., 36 (1935). [5] A. A. Марков, Мат. сб., 4(46), 1 (1938). [6] A. S. Besicovitch, Almost Periodic Functions, Cambridge (1932). [7] F. Riesz, Acta Szeged., 6 (1933). [8] G. Hamel, Math. Ann., 60 (1905). [9] W. Sierpiński, Fund. Math., 1 (1920). [10] S. Banach, Fund. Math., 1 (1920). [11] G. Herglotz, Leipz. Berichte, 63 (1911).

* После того, как настоящая заметка была сдана в печать, я узнал из письменного сообщения М. Г. Крейна, что этот результат был получен в прошлом году А. П. Артеменко, притом совершенно другим методом.