Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. М. КАМЕНЕЦКИЙ

ОБ ИНДИКАТРИСЕ ВОЗРАСТАНИЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ АССОЦИИРОВАННЫМ РЯДОМ ТЕЙЛОРА. II

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 III 1940)

Пусть $h(\varphi)$—всюду непрерывная периодическая функция с периодом 2π. Возьмем в качестве множества T множество всех точек комплексной плоскости. Обозначим соответствующее множество $E(h, T)$, определенное в предыдущей статье автора ([2]), через $E(h)$. Имеет место следующее предложение:

Лемма III. *Множество $E(h)$ всюду плотно на отрезке* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Нужно показать, что любой интервал (φ_1, φ_2), $\varphi_2 > \varphi_1$, отрезка $[0, 2\pi]$ содержит точки множества $E(h)$. Пусть $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\delta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, m_i—нижняя грань функции $h(\varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2), M_e—наибольшее значение функции $h(\varphi)$ вне интервала (φ_1, φ_2). Положим $\alpha = -\varphi_0$, $\lambda > \frac{M_e - m_i}{1 - \cos\delta}$. Тогда, если φ лежит вне интервала (φ_1, φ_2),

$$h(\varphi_0) + \lambda > h(\varphi) + \lambda \cos(\alpha + \varphi).$$

Отсюда видно, что точки φ_t множества $E(h)$, соответствующие значению $t = \lambda e^{i\alpha}$, не могут лежать вне интервала (φ_1, φ_2).

Лемма IV. *Пусть функция $h(\varphi)$ такова, что множество $E(h)$ содержит все точки отрезка $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, точек множества E_1, нигде не плотного на этом отрезке. Положим*

$$\max_{\varphi} (h(\varphi) + \lambda \cos(\alpha + \varphi)) = A(\lambda, \alpha). \tag{1}$$

Тогда, если $\underline{h}(\varphi)$—всюду непрерывная функция с периодом 2π, удовлетворяющая, каково бы ни было $t = \lambda e^{i\alpha}$ $(\lambda \geqslant 0)$, соотношению

$$\max_{\varphi} (\underline{h}(\varphi) + \lambda \cos(\alpha + \varphi)) = A(\lambda, \alpha),$$

то $\underline{h}(\varphi) \equiv h(\varphi)$.

Доказательство. Пусть F—пересечение множеств $E(h)$ и $E(\underline{h})$; множество F всюду плотно на сегменте $[0, 2\pi]$ (лемма III). Но на основании леммы I предыдущей статьи автора ([2]) функции $h(\varphi)$ и $\underline{h}(\varphi)$ имеют одинаковые значения в точках множества F. Отсюда, принимая во внимание, что функции $h(\varphi)$ и $\underline{h}(\varphi)$ непрерывны, заключаем, что $\underline{h}(\varphi) \equiv h(\varphi)$.

Пусть теперь

$$h(\varphi) = \max [h_1(\varphi), \dots h_m(\varphi)],$$

где

$$h_j(\varphi) = \lambda_j \cos(\varphi + \alpha_j) \quad (j = 1, \dots m); \tag{2}$$

числа $t_j = \lambda_j e^{i\alpha_j}$ все различны ($\lambda_j \geqslant 0$). Такую индикатрису имеет, например, функция $g(z) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{t_i z} (c_i \neq 0)$.

Как показывает простое вычисление, множество $E(h)$ здесь содержит все точки отрезка $[0, 2\pi]$, за исключением конечного числа *. Следовательно, функция $h(\varphi)$, определенная посредством соотношений (2), удовлетворяет условиям леммы IV. Функция $A(\lambda, \alpha)$, определенная посредством соотношения (1), выражается здесь следующим образом:

$$A(\lambda, \alpha) = \max [A_1(\lambda, \alpha), \dots A_m(\lambda, \alpha)], \tag{3}$$

где

$$A_i(\lambda, \alpha) = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\lambda_i \cos(\alpha - \alpha_i) + \lambda_i^2} \quad (i = 1, \dots m).$$

Мы приходим к следующей теореме, представляющей собой обобщение теоремы IV предыдущей статьи автора.

Теорема VI. *Для того чтобы функция $h(\varphi)$, определенная посредством соотношений* (2), *была индикатрисой возрастания целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ первого порядка и нормального типа, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $t = \lambda e^{i\alpha}$ ($\lambda \geqslant 0$), имело место соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} a_k} \right| = A(\lambda, \alpha), \tag{4}$$

где $A(\lambda, \alpha)$—функция, определенная посредством соотношений (3) ([2]).

Переходя к функции, сопряженной с $f(z)$ по Борелю, получаем следующий результат:

Теорема VII. *Для того чтобы наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки t_j ($j = 1, \dots m$), $t_j = \lambda_j e^{i\alpha_j}$ ($\lambda_j \geqslant 0$), был выпуклой областью особенностей* ([1]) *функции $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $t = \lambda e^{i\alpha}$ ($\lambda \geqslant 0$), имело место соотношение* (4), *где $A(\lambda, \alpha)$—функция, определенная посредством соотношений* (3).

В частном случае, когда все λ_i ($i = 1, \dots m$) равны между собой, можно сформулировать такой результат:

Теорема VIII. *Пусть $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$. Если, каково бы ни было $t = \lambda e^{i\alpha}$, имеет место соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k t^{n-k}} \right| = A(\lambda, ,$$

* Каждое значение φ, не входящее в множество $E(h)$, должно уовлетворять одному из уравнений $\lambda_i \cos(\varphi + \alpha_i) = \lambda_k \cos(\varphi + \alpha_k)$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \dots, m$).

где функция $A(\lambda, \alpha)$ *определяется посредством соотношений*

$$A(\lambda, \alpha) = \max [B_1(\lambda, \alpha), \ldots, B_m(\lambda, \alpha)];$$

$$B_i(\lambda, \alpha) = \frac{1}{R}\sqrt{R^2\lambda^2 + 2\lambda R\cos(\alpha - \alpha_i) + 1} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

то точки $Re^{-i\alpha_j}(j = 1, \ldots, m)$ *являются единственными особыми точками функции* $F(z)$ *на круге радиуса* R *с центром в начале координат.*

Когда $m = 2$, получаем более полный результат:

Теорема IX. *Для того чтобы функция* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *имела бы особенности в точках* $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ $(r_{1,2} \neq 0)$ *и не имела бы особенностей, не расположенных на дуге круга, определяемого точками* $z_1, z_2, 0$, *не содержащей начала координат, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было* $t = \lambda e^{i\alpha}$ $(\lambda \geqslant 0)$, *выполнялось соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k t^{n-k}}\right| = A(\lambda, \alpha),$$

где

$$A(\lambda, \alpha) = \max [B_1(\lambda, \alpha), \; B_2(\lambda, \alpha)],$$

$$B_i(\lambda, \alpha) = \frac{1}{r_i}\sqrt{\lambda^2 r_i^2 + 2\lambda r_i \cos(\varphi_i + \alpha) + 1} \quad (i = 1, 2).$$

Воронежский государственный университет

Поступило
25 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Pólya, Math. ZS., 29,549—640 (1929). [2] И. М. Каменецкий, ДАН XXVI, № 6 (1940).