Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Л. ШАГИНЯН

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМАМИ В НЕЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 III 1940)

1° Пусть B есть область плоскости комплексного переменного z, ограниченная спрямляемым нежордановым контуром C, имеющим внутренние двойные линии и петли, и γ—та часть контура C, которая является одновременно контуром бесконечной области. Пусть $z=\varphi(w)$—одна из функций, совершающих конформное преобразование круга $|w|<1$ на область B. Мы говорим, что функция $f(z)$, регулярная внутри B, принадлежит классу $(\mathcal{E}_2)$, если интегралы

$$\int\limits_{C_r} |f(z)|^2\, ds,$$

где C_r—круговые изображения, т. е. образы окружностей $|w|=r$, остаются ограниченными. Такая функция имеет почти везде на C предельные значения по некасательным путям, и квадрат модуля этих предельных значений есть суммируемая на C функция ([1]). В работе В. И. Смирнова дано необходимое и достаточное условие, которому должен удовлетворять контур C, являющийся спрямляемой кривой Жордана, для того чтобы для любой функции $f(z)$ из $(\mathcal{E}_2)$ существовала такая последовательность полиномов $P_n(z)$, что

$$\int\limits_{C} |f(z)-P_n(z)|^2\, ds \to 0. \tag{1}$$

Мы покажем, что для упомянутого выше контура, не являющегося кривой Жордана, такая аппроксимация для всего класса $(\mathcal{E}_2)$ невозможна. Точнее говоря, мы докажем следующую теорему: *если для некоторой функции $f(z)$ из $(\mathcal{E}_2)$ возможна аппроксимация в смысле* (1), *то $f(z)$ регулярна везде внутри* γ. Составим интегралы

$$\int\limits_{\gamma} z^n f(z)\, dz \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{2}$$

Если все они равны нулю, то интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{3}$$

дает функцию, регулярную внутри γ и имеющую на γ почти везде предельные значения $f(z)$ (3). В силу теоремы единственности наша функция $f(z)$ должна внутри γ совпадать с функцией (3). Покажем, что если хотя один из интегралов (2) отличен от нуля, то аппроксимация (1) невозможна. Итак, пусть p—целое и неотрицательное число такое, что

$$\int_{\gamma} z^p f(z)\,dz = \alpha \neq 0.$$

Для любого полинома $P_n(z)$ мы имеем

$$\int_{\gamma} z^p\,[f(z)-P_n(z)]\,dz = \alpha$$

и, следовательно,

$$\int_{\gamma} |z|^p\,|f(z)-P_n(z)|\,ds \geqslant \alpha.$$

Применяя неравенство Шварца, получим

$$\int_{\gamma} |f(z)-P_n(z)|^2\,ds \geqslant |\alpha|^2 : \int_{\gamma} |z|^{2p}\,ds,$$

а, следовательно, и подавно:

$$\int_{C} |f(z)-P_n(z)|^2\,ds \geqslant |\alpha|^2 : \int_{\gamma} |z|^{2p}\,ds,$$

т. е. аппроксимация (1) невозможна.

2° В работе М. В. Келдыша (3) исследован вопрос о квадратичном приближении в смысле двойного интеграла:

$$\iint_{B} |f(z)-P_n(z)|^2\,dx\,dy \to 0, \tag{4}$$

где B—ограниченная односвязная область. Мы говорим, что функция $f(z)$, регулярная внутри B, принадлежит классу (F_2), если интеграл

$$\iint_{B} |f(z)|^2\,dx\,dy$$

имеет конечное значение. М. В. Келдышем даны примеры нежордановых областей, в которых невозможно для всего класса (F_2) квадратичное приближение полиномами в смысле формулы (4). Мы приведем новый класс областей, для которых также имеет место указанный факт.

Пусть A—кратная точка контура области B. Будем говорить, что эта точка достижима нулевым углом, если существуют две гладкие кривые, выходящие из A, имеющие в этой точке соприкосновение конечного порядка и образующие угол, лежащий внутри B. Положим, что точка A достижима с разных сторон двумя нулевыми углами: SAD и $S'AD'$. Выберем точку A за начало координат и направим ось абсцисс по общей касательной к AS и AD. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$—ординаты этих кривых. По условию должно существовать целое положительное число p такое, что в окрестности точки A:

$$\frac{|y_2 - y_1|}{|x|^{2p}} > a > 0, \tag{5}$$

где a—некоторая положительная постоянная. То же самое будет иметь место для AS' и AD'. Пусть $f(z)$—функция, имеющая особые точки внутри замкнутой петли $A\mathcal{E}A$ и регулярная в замкнутой области B. Если l—любой замкнутый контур, проходящий через точку A, лежащий всеми своими остальными точками внутри B и содержащий петлю $A\mathcal{E}$ внутри, то существует такое целое неотрицательное k, что

$$\int\limits_l z^{p+k} f(z)\, dz = \alpha \neq 0,$$

причем начало координат мы считаем в точке A. Отсюда:

$$\int\limits_l z^{p+k} [f(z) - P_n(z)]\, dz = \alpha,$$

где $P_n(z)$—любой полином. Применяя неравенство Шварца, получим:

$$\int\limits_l |z|^{2k} |f(z) - P_n(z)|^2\, ds \geqslant \frac{|\alpha|^2}{q}, \tag{6}$$

причем мы обозначили:

$$q = \int\limits_l |z|^{2p}\, ds. \tag{7}$$

Построим в угле DAS кривые:

$$y = \theta y_1(x) + (1 - \theta)\, y_2(x) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1), \tag{8}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$—указанные выше ординаты кривых AD и AS, и аналогичные кривые построим в угле $D'AS'$. Эти кривые, при одинаковых значениях θ, соединим кривыми, лежащими в некоторой области Δ, лежащей внутри B. Для всех этих кривых l можно считать, что величина q имеет конечную верхнюю границу q_0. Положим теперь, что существует последовательность полиномов $P_n(z)$, удовлетворяющих условию (4). При этом в области Δ мы имеем равномерное стремление разности $f(z) - P_n(z)$ к нулю. Из сказанного и неравенства (6) следует, что при больших значениях n по крайней мере в одном из углов SAD или $S'AD'$ имеет место следующее неравенство при интегрировании по кривым (8):

$$\int\limits_{AL} |z|^{2k} |f(z) - P_n(z)|^2\, ds \geqslant \frac{|\alpha|^2}{4q_0}. \tag{9}$$

При этом, может быть, придется несколько уменьшить промежуток изменения θ, что не является существенным. Возьмем интеграл (4) по треугольнику DAS и перейдем к новым переменным интегрирования (θ, x):

$$\iint\limits_{DAS} |f(z) - P_n(z)|^2\, dx\, dy = \int\limits_{DAS} |y_2 - y_1|\, |f(z) - P_n(z)|^2\, d\theta\, dx.$$

Пользуясь гладкостью кривых (8) и неравенством (5), мы можем заменить dx на элемент длины дуги ds кривых (8), а $|y_2 - y_1|$ на $a|z|^{2p}$ и придем к неравенству вида:

$$\iint\limits_{DAS} |f(z) - P_n(z)|^2\, dx\, dy \geqslant M \int\limits_0^1 \Bigl[\, \int\limits_{AL} |z|^{2p} |f(z) - P_n(z)|^2\, ds \Bigr] d\theta,$$

где M—некоторая постоянная. Пользуясь затем неравенством (9), мы можем утверждать, что интеграл, стоящий в левой части, при достаточно больших значениях n остается больше некоторой положительной постоянной. Тем более это можно утверждать относительно интеграла:

$$\iint_B |f(z) - P_n(z)|^2 \, dx \, dy,$$

а это противоречит (4). Таким образом мы показали, что не может существовать последовательность полиномов, которая удовлетворяла бы условию (4) для указанной выше функции $f(z)$. Пользуясь тем же методом, можно значительно обобщить условия, налагаемые на кратную точку A. В частности, можно заменить требование конечного порядка соприкосновения дуг DA и SA более общим требованием.

Эреванский университет

Поступило
20 III 1940

ЦИТИРОВАННЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Smirnoff, Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS (1932). [2] В. Смирнов, Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва, II, вып. 1 (1928). [3] М. Келдыш, Мат. сборн., 5(47), 2 (1939).