Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. ЕФИМОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ, НЕ ИЗГИБАЕМОЙ В МАЛОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 III 1940)

В настоящее время известны доказательства жесткости и неизгибаемости ряда поверхностей в целом (овалоидов, тора). С другой стороны, доказано, что для любой эллиптической или гиперболической точки аналитической поверхности существует окрестность, допускающая непрерывное изгибание. H. Schilt (1) установил аналогичное предложение для случая параболической точки, в которой поверхность имеет с касательной плоскостью первый порядок прикосновения. Таким образом неизгибаемой в малом может быть лишь окрестность параболической точки, в которой поверхность имеет с касательной плоскостью порядок прикосновения $p \geqslant 2$.

Мы доказываем здесь существование таких поверхностей.

1° Пусть дана поверхность, определенная уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,v),\\ y&=y(u,v),\\ z&=z(u,v),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

правые части которых аналитичны в окрестности точки M_0 $(u=0, v=0)$. Предположим порядок прикосновения поверхности с касательной плоскостью в точке M_0 равным $p \geqslant 3$.

Мы будем рассматривать непрерывные изгибания этой поверхности, подчиненные следующим ограничениям: последовательные формы изгибаемой поверхности определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,v,t),\\ y&=y(u,v,t),\\ z&=z(u,v,t)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

так, что

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

не зависит от t, при $t=0$ правые части (2) совпадают с x, y, z из (1) и в окрестности $u=0$, $v=0$, $t=0$ регулярны по u, v и непрерывны по t вместе с частными производными по u, v до $p+1$-порядка. Коротко мы скажем, что допустимыми являются изгибания $p+1$-порядка гладкости.

Если начало координат помещено в точку M_0 и оси x, y расположены в касательной плоскости, то вблизи M_0 поверхность (1) будет определена уравнением вида

$$z = F^{(m)}(x, y) + F^{(m+1)}(x, y) + \dots, \tag{3}$$

где $F^{(k)}(x,y)$ обозначают однородную группу членов тейлорова разложения и $m = p + 1$.

В нашей заметке ([2]) определено понятие порядка относительной неизгибаемости поверхности (3) и дана оценка снизу порядку относительной неизгибаемости с помощью некоторого арифметического инварианта $N(F^{(m)})$ формы $F^{(m)}(x, y)$.

Несколько видоизменяя определения, данные в указанной заметке, положим порядок относительной неизгибаемости

$$h = \sup\{k\},$$

где $\{k\}$ определено следующим образом: число k входит в $\{k\}$, если при всех непрерывных изгибаниях поверхности (3) в ее уравнении вида (3), отнесенном к координатной системе, твердо связанной с пучком линейных элементов в точке M_0, однородные группы $F^{(0)}(x, y), \dots$ $\dots, F^{(m+k)}(x, y)$ остаются без изменения.

Соответственно

$$N(F^{(m)}) = \sup\{l\},$$

число l входит в $\{l\}$, если из

$$F^{(m)}_{xx}\Phi^{(n)}_{yy} - 2F^{(m)}_{xy}\Phi^{(n)}_{xy} + F^{(m)}_{yy}\Phi^{(n)}_{xx} \equiv 0$$

следует $\Phi^{(n)} \equiv 0$ для $n = m+1,\ m+2, \dots, m+l$.

Тогда, как было отмечено в заметке ([2]), если однородная форма

$$F^{(m)}(x, y) = a_0 x^m + \left[{m \atop 1}\right] a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m$$

подчинена двум условиям:

a) $F^{(m)}(x, y)$ не имеет вещественных кратных линейных множителей;

b) ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_m \end{Vmatrix} \tag{4}$$

равен 3, то порядок относительной неизгибаемости $h \geqslant N(F^{(m)})$.

Таким образом для доказательства существования поверхности вида (3), на которой всякая окрестность точки M_0 не допускает непрерывных изгибаний, достаточно установить существование формы $F^{(m)}(x, y)$ $(m \geqslant 4)$, подчиненной условиям a) и b) и имеющей $N(F^{(m)}) = \infty$.

Рассмотрим форму $F^{(9)} = x^3 y^6$ и положим

$$\Phi^{(n)} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n.$$

Тогда

$$F^{(9)}_{xx}\Phi^{(n)}_{yy} - 2F^{(9)}_{xy}\Phi^{(n)}_{xy} + F^{(9)}_{yy}\Phi^{(n)}_{xx} = \sum_{k=0}^{n} B_k x^{n-k+1} y^{k+4},$$

где

$$B_k = \{6k(k-1) - 36k(n-k) + 30(n-k)(n-k-1)\}\, b_k.$$

Из $B_k = 0$ вытекает $b_k = 0$, если целочисленный коэффициент в фигурных скобках не обращается в нуль.

Положим $k=z$, $n-k=t$; уравнение

$$z(z-1)-6zt+5t(t-1)=0$$

имеет дискриминант старших членов, равный квадрату целого числа, и дискриминант всех членов, отличный от нуля. В этом случае, как известно, уравнение имеет лишь конечное множество целочисленных решений. Решая это уравнение, найдем, что $n=z+t$ для всех положительных решений меньше 9. Отсюда следует, что $N(F^{(9)})=\infty$.

Однако форма x^3y^6 не удовлетворяет условию а).

Теорема. *Существует форма $F_0^{(9)}(x, y)$, подчиненная условиям* а) *и* b), *для которой $N(F_0^{(9)})=\infty$.*

Доказательство. Возьмем произвольную форму $F^{(9)}(x, y)$ и условимся систему ее коэффициентов $(a_0 a_1 \ldots a_9)$ рассматривать как точку евклидова пространства $E^{(10)}$.

Обозначим через φ_1 дискриминант $F^{(9)}(x, y)$, через φ_2—сумму квадратов миноров 3-го порядка матрицы (4). Рассмотрим теперь произвольную форму 10-й степени $\Phi^{(10)}(x, y)$ и обозначим через $b_0 b_1 \ldots b_{10}$ ее коэффициенты. Приравнивая нулю коэффициенты формы

$$\Psi^{(15)}=F_{xx}^{(9)}\Phi_{yy}^{(10)}-2F_{xy}^{(9)}\Phi_{xy}^{(10)}+F_{yy}^{(9)}\Phi_{xx}^{(10)},$$

получим систему линейных однородных уравнений относительно $b_0 b_1 \ldots$ $\ldots b_{10}$. Составив матрицу этой системы, обозначим через φ_3 сумму квадратов миноров 11-го порядка этой матрицы. По отношению к произвольной форме 11-й степени определим аналогично φ_4 и т. д.

Так мы получим бесконечную последовательность

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

целых рациональных функций от $a_0 a_1 \ldots a_9$. Ни одна из этих функций не равна нулю тождественно. В самом деле, для φ_1 это очевидно, для остальных это следует из вышеприведенного рассмотрения формы x^3y^6. Отсюда следует, что в $E^{(10)}$ можно выбрать замкнутую область σ_1, в которой φ_1 отлична от нуля, в σ_1 — замкнутую область σ_2, в которой φ_2 отлична от нуля и т. д. Тогда существует точка $(a_0^0 \ldots a_9^0)$, принадлежащая всем σ_n. Форма $F_0^{(9)}(x, y)$ с коэффициентами $a_0^0 \ldots a_9^0$ удовлетворяет условиям а), b) и $N(F_0^{(9)})=\infty$.

Принимая во внимание изложенное выше, мы можем утверждать следующую теорему.

Теорема. *На поверхности, представленной уравнением*

$$z=F_0^{(9)}(x, y)+F^{(10)}(x, y)+\ldots,$$

где $F^{(n)}(x, y)$ $(n=10, 11, \ldots)$—произвольные однородные формы, всякая окрестность нулевой точки не допускает непрерывных изгибаний.

2° При дополнительном ограничении допустимых непрерывных изгибаний требованием гладкости до $p+2$-порядка можно высказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть дана поверхность*

$$z=F^{(m)}(x, y)+F^{(m+1)}(x, y)+\ldots,$$

где $F^{(m)}(x, y)$—однородная форма, вещественные линейные множители которой имеют кратности, не превышающие $m-2$; если $F^{(m)}(x, y)$ и $F^{(m+1)}(x, y)$ не имеют общих кратных вещественных линейных множителей и $N(F^{(m)})>0$, то при непрерывном изгибании этой поверхности порядок ее прикосновения с касательной плоскостью в нулевой точке остается неизменным.

Эта теорема, очевидно, дополняет теорему 10 нашей заметки [3] и позволяет аналогично предыдущему формулировать следующее предложение.

Теорема. *Пусть поверхность определена уравнением*

$$z = F^{(m)}(x, y) + F^{(m+1)}(x, y) + \ldots,$$

где $F^{(m)}(x, y)$ и $F^{(m+1)}(x, y)$ *подчинены следующим условиям:*

a) *кратности вещественных линейных множителей формы* $F^{(m)}(x, y)$ *не превышают* $m-2$;

b) $F^{(m)}(x, y)$ *и* $F^{(m+1)}(x, y)$ *не имеют общих вещественных кратных линейных множителей;*

c) $N(F^{(m)}) > 0$ *и ранг матрицы* (4) *для формы* $F^{(m)}(x, y)$ *равен* 3.

Тогда порядок относительной неизгибаемости данной поверхности $h \geqslant N(F^{(m)})$.

Из этой теоремы и из того, что $N(x^3y^6) = \infty$, следует, что, например, на алгебраическом параболоиде

$$z = x^3y^6 + x^{10} + y^{10}$$

любая окрестность нулевой точки не допускает непрерывных изгибаний.

Замечание. В заметке [4] нами указаны необходимые и достаточные условия для метрики окрестности параболической точки M_0, при выполнении которых все поверхности с данной метрикой, имеющие с касательной плоскостью в M_0 прикосновение первого порядка и не касающиеся плоскости вдоль линии, могут быть получены регулярными изгибаниями одной такой поверхности и ее зеркального отражения так, что в течение изгибания ни разу не происходит прикосновение с плоскостью вдоль линии.

Однако выведенное отсюда заключение, что все эти поверхности имеют общий индекс точки M_0, ошибочно.

Поступило
17 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Schilt, Compositio Mathem., 5 (1937). [2] Н. Ефимов, ДАН, XXV, № 3 (1939). [3] Н. Ефимов, ДАН, XXIII, № 9 (1939). [4] Н. Ефимов, ДАН, XXVI, № 2 (1940).