Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

ЛУ-КЕН-ХУА

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 13 III 1940)

Мы можем доказать при помощи одного важного результата И. М. Виноградова с видоизменением, данным автором, что

Пусть n целое $\geqslant 2$ и s целое $\geqslant s_0$, где s_0 дано следующей таблицей:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\geqslant 11$
s_0	7	17	47	125	313	761	1779	4039	9191	$2\,[2{,}07n\,(n+1)\,(n+2)\log n]+1$

Можно выбрать последовательность вещественных чисел $E_k = E_k\,(n, s) > 1$, $e_k = e_k\,(n, s) < 1$ таких, что для каждой системы положительных целых $N_1, \ldots, N_n$, удовлетворяющих условиям

$$N_k = h_k N_n^{\frac{k}{n}}, \quad E_k \leqslant h_k \leqslant s^{1-\frac{k}{n}} e_k, \quad 1 \leqslant k < n,$$

число решений системы диофантовых уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_s = N_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \ldots + x_s^n = N_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

равно

$$I\,(N_1, \ldots, N_n) =$$

$$= B_1\,(n, s, h_1, \ldots, h_{n-1})\, N_n^{\frac{s}{n} - \frac{1}{2}(n+1)} (\mathfrak{S}\,(N_1, \ldots, N_n) + O\,(N_n^{-\delta})),$$

где δ—положительное число, зависящее только от n,

$$B_1\,(n, s, h_1, \ldots, h_{n-1}) \geqslant B_0\,(n, s) > 0,$$

$$\mathfrak{S}\,(N_1, \ldots, N_n) = \sum_{q_1, \ldots, q_n = 1}^{\infty} A\,(q_1, \ldots, q_n),$$

$$A\,(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} D^s e^{-2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} N_1 + \ldots + \frac{a_n}{q_n} N_n\right)}$$

(где $a_1, \dots, a_n$ пробегают приведенные системы вычетов соответственно по модулям $q_1, \dots, q_n$) и

$$D = \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \sum_{1 \leqslant x \leqslant q_1 \cdots q_n} e^{2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} x^n + \dots + \frac{a_1}{q_1} x\right)}.$$

Результат получен автором независимо от работы К. К. Марджанишвили (1) и в действительности он несколько лучше его результата.

Как следствие теоремы можно вывести, что: если $s \geqslant s_0$ и $\mathfrak{S}(N_1, \dots, N_n) > 0$, тогда система (1) имеет решение для достаточно больших N_k. Целью настоящей заметки является сообщение следующего усовершенствования этого следствия: ограничение для s может быть заменено на

$$s \geqslant n \left\{ \left[\frac{\log(23{,}2 n^7 \log n)}{\log n - \log(n-1)} \right] + 1 \right\} + \frac{1}{2}(n+1)\, n \sim 7n^2 \log n.$$

Доказательство этого утверждения является несколько вперед идущим уточнением оригинального метода И. М. Виноградова и моей старой леммы (2):

Существует система целых a_i такая, что число решений

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \chi_{ij}^{h} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \chi_{ij}'^{h}, \quad 1 \leqslant h \leqslant n,$$

$$a_i P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}} \leqslant \chi_i\,, \quad \chi_{ij}' \leqslant 2 a_i P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}}$$

равно

$$0\left(P^{n^2 - \frac{1}{2} n (n+1)\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)}\right).$$

Наконец, аналогичные результаты с ограничением, что x_s в (1) простые, также установлены (с числом неизвестных, большим на два).

Университет Цзин Хуа
Кунминг Юннан, Китай

Поступило
16 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. К. Марджанишвили, ДАН, XXII, № 7, 471—474 (1939). [2] Quaterly Journ. of Math., 9, lemma 4 (1938).