Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. МАЛКИН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ POINCARÉ-ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 III 1940)

При исследовании движений на устойчивость в смысле Ляпунова имеет существенное значение вопрос о существовании голоморфных интегралов уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial z_i}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s)\frac{\partial z_i}{\partial x_s}=Z_i(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k) \qquad (1)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k).$$

Здесь X_s и Z_i суть зависящие от t голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, $z_1, \ldots, z_k$, разложения которых по степеням этих переменных не содержат свободных членов и сходятся вблизи начала координат в равной степени при всех положительных значениях t (т. е. равномерно относительно t). При этом разложения функций X_s начинаются членами не ниже второго порядка, а разложения функций Z_i могут содержать и члены первого порядка, но не зависящие от $z_1, \ldots, z_k$. Коэффициенты в этих разложениях, а также коэффициенты $p_{s\sigma}$ суть непрерывные вещественные функции t, ограниченные при $t\geqslant 0$.

Нужно узнать, возможно ли удовлетворить уравнениям (1) системой функций $z_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, голоморфных относительно $x_1, \ldots, x_n$ в равной степени при всех положительных значениях t, разложения которых обладали бы при этом ограниченными коэффициентами.

Системы уравнений вида (1) рассматривались Ляпуновым ([1]) и Poincaré ([2]) в предположении, что коэффициенты этих уравнений либо постоянны, либо являются периодическими функциями от t с одним и тем же периодом. В частности, эти авторы показали, что в случае постоянных коэффициентов уравнениям (1) можно удовлетворить (и притом единственным образом) независящими от t голоморфными функциями, если вещественные части всех корней уравнения

$$|p_{ik}-\delta_{ik}\rho|=0$$

отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Можно показать, что в этом случае существует знакоопределенная квадратичная форма $V(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что форма

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)$$

будет также знакоопределенной.

Мы рассматриваем здесь задачу при общих предположениях, указанных выше. Покажем, что имеют место две следующие теоремы:

Теорема 1. *Если существует квадратичная форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которой суть ограниченные функции t, удовлетворяющая неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant a^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \leqslant -b^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где a и b—вещественные постоянные, то существует одна и только одна система функций $z_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнениям (1), голоморфных относительно $x_1, \ldots, x_n$ в равной степени при всех $t \geqslant 0$, разложения которых по степеням этих переменных обладают ограниченными коэффициентами.

Доказательство. 1° Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad (3)$$

и пусть $x_{1i}(t_0, t) \ldots, x_{ni}(t_0, t)$—фундаментальная система ее решений, определяемая начальными условиями:

$$x_{si}(t_0, t_0) = 1 \quad \text{при } s = i,$$
$$x_{si}(t_0, t_0) = 0 \quad \text{при } s \neq i,$$

где t_0—начальное значение t, являющееся произвольным положительным числом.

Легко показать ([3]), что если существует квадратичная форма V, удовлетворяющая условиям (2), то всегда существуют две *независящие* от t_0 положительные постоянные α и M такие, что при всех $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$|x_{sk}(t_0, t)| < Me^{-\alpha(t - t_0)}, \quad (4)$$

где, очевидно, $M \geqslant 1$.

2° О. Перрон ([4]) показал, что систему линейных уравнений (3) можно при помощи линейного преобразования привести к такому виду, что все коэффициенты, стоящие над главной диагональю, обратятся в нуль. При этом коэффициенты преобразованной системы, коэффициенты преобразования и коэффициенты обратного преобразования являются ограниченными функциями от t. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем предположить, что в уравнениях (1) все коэффициенты $p_{s\sigma}$, для которых $s < \sigma$, равны нулю.

Так как при этом условии функции $x_{ss}(t_0, t)$ равны соответственно $e^{\int_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt}$, то на основании (4) находим

$$e^{\int_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt} < Me^{-\alpha(t - t_0)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (5)$$

3° Установив это, попытаемся удовлетворить уравнениям (1) формальными рядами вида

$$z_i = z_i^{(1)} + z_i^{(2)} + \ldots,$$

где $z_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ суть формы m-го порядка относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда для определения $z_i^{(m)}$ мы получим систему уравнений

$$\frac{\partial z_i^{(m)}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial z_i^{(m)}}{\partial x_s} = U_i^{(m)} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

где $U_i^{(m)}$ суть также формы m-го порядка относительно $x_1, \ldots, x_n$, выводимые известным образом из тех $z_i^{(l)}$, для которых $l < m$. Допустим, что все $z_i^{(l)}$, для которых $l < m$, уже вычислены и что коэффициенты при этих формах вышли ограниченными. Тогда, полагая

$$z_i^{(m)} = \sum A_i^{(m_1 \ldots m_n)}(t)\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \quad (m_1 + \ldots + m_n = m),$$

мы получим для определения коэффициентов A некоторую систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений, обладающих ограниченными коэффициентами. Так как $p_{s\sigma} = 0$ при $s < \sigma$, то, как нетрудно видеть, если коэффициенты $A_i^{(m_1 \ldots m_n)}$ вычислять в определенном порядке, мы для каждого такого коэффициента получим уравнение вида

$$\frac{dA_i^{(m_1 \ldots m_n)}}{dt} + (m_1 p_{11} + \ldots + m_n p_{nn}) A_i^{(m_1 \ldots m_n)} = -C_i^{(m_1 \ldots m_n)}, \tag{6}$$

где $C_i^{(m_1 \ldots m_n)}$ есть целая рациональная функция от ранее найденных коэффициентов. Коэффициенты в этой функции будут суммами произведений величин $p_{s\sigma}$, для которых $s > \sigma$, коэффициентов разложений величин $X_s, -Z_i$ и некоторых положительных целых чисел. Из уравнения (6) находим для $A_i^{(m_1 \ldots m_n)}$ частное решение

$$A_i^{(m_1 \ldots m_n)} = e^{-\sum\limits_{s=1}^{n} m_s \int\limits_0^t p_{ss}\, dt} \int\limits_t^{\infty} C_i^{(m_1 \ldots m_n)} e^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_s \int\limits_0^t p_{ss}\, dt}\, dt.$$

Допустим, что все ранее найденные коэффициенты A ограничены. Тогда, заменяя в функции $C_i^{(m_1 \ldots m_n)}$ все эти коэффициенты, а также другие входящие в нее величины некоторыми высшими пределами их модулей и обозначая полученный результат через $\overline{C}_i^{(m_1 \ldots m_n)}$, будем на основании (6) иметь:

$$|A_i^{(m_1 \ldots m_n)}| < \overline{C}_i^{(m_1 \ldots m_n)} e^{-\sum m_s \int\limits_0^t p_{ss}\, dt} \int\limits_t^{\infty} e^{\sum m_s \int\limits_0^t p_{ss}\, dt}\, dt =$$

$$= \overline{C}_i^{(m_1 \ldots m_n)} \int\limits_t^{\infty} e^{\sum m_s \int\limits_t^z p_{ss}(y)\, dy}\, dz < M^m \overline{C}_i^{(m_1 \ldots m_n)} \int\limits_t^{\infty} e^{-m\alpha(z-t)}\, dz =$$

$$= \frac{M^m}{m\alpha} \overline{C}_i^{(m_1 \ldots m_n)}. \tag{7}$$

Следовательно, полученное нами частное решение для $A_i^{(m_1 \ldots m_n)}$ также ограничено при всех $t \geqslant 0$. Что же касается остальных решений уравнения (6), то все они будут неограниченными, так как на основании (5) все решения соответствующего однородного уравнения неограниченны.

Таким образом можно последовательно определить все коэффициенты A, и все они получатся вполне определенными и ограниченными. Следовательно, существует одна и только одна система разложений для z_i, обладающих всеми свойствами, указанными в теореме, и формально удовлетворяющих уравнениям (1).

Из неравенства (7) вытекает, что разложения z_i будут сходиться при всех $t \geqslant 0$ и притом равномерно относительно t, если сходятся ряды

$$\sum \frac{M^{m_1+\ldots+m_n}}{(m_1+\ldots+m_n)\alpha} \overline{C}_i^{(m_1\ldots m_n)} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n} \quad (m_1+\ldots+m_n \geqslant 1). \tag{8}$$

Что же касается этих последних рядов, то ими, при $M=1$, определяется, как нетрудно видеть, единственное голоморфное решение для $v_1, \ldots, v_k$ системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} (\alpha_{s1} y_1 + \ldots + \alpha_{sn} y_n + Y_s) \frac{\partial v_i}{\partial y_s} = V_i \quad (i=1, 2, \ldots, k), \tag{9}$$

где

$$\alpha_{ss} = \alpha \quad (s=1, 2, \ldots, n),$$

$\alpha_{s\sigma}$ при $s < \sigma$ равны нулю, $\alpha_{s\sigma}$ при $s > \sigma$ суть верхние пределы модулей величин $p_{s\sigma}$ и, наконец, Y_s и V_i суть функции, в которые обращаются X_s и правые части уравнений (1), если в их разложениях заменить все коэффициенты высшими пределами их модулей, а величины $x_1, \ldots, x_n$ величинами $y_1, \ldots, y_n$.

Но уравнения (9) удовлетворяют всем условиям теоремы Пуанкаре-Ляпунова. Следовательно, ряды (8) при $M=1$ сходятся. То же самое будет справедливо и при $M \neq 1$. В этом случае лишь несколько уменьшится область сходимости. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что

$$|A_i^{(m_1\ldots m_n)}| < \frac{M^{2m} \overline{C}_{i1}^{(m_1\ldots m_n)}}{m\alpha},$$

так как $M > 1$.

Здесь $\overline{C}_{i1}^{(m_1\ldots m_n)}$ обозначают величины, в которые обращаются $\overline{C}_i^{(m_1\ldots m_n)}$, если в них положить $M=1$. Таким образом теорема доказана.

Теорема 2. *Допустим, что существует квадратичная форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, обладающая ограниченными при $t \geqslant 0$ коэффициентами и удовлетворяющая неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant a^2 (x_1^2 + \ldots + x_n^2), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \geqslant b^2 (x_1^2 + \ldots + x_n^2), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где a и b — вещественные постоянные. Тогда существует одна и только одна система вещественных функций $z_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, голоморфных относительно $x_1, \ldots, x_n$ в равной степени при всех значениях $t \geqslant 0$, разложения которых по степеням этих переменных не содержат свободных членов и обладают ограниченными коэффициентами, удовлетворяющих уравнениям (1) и обращающихся при $t = t_0 \geqslant 0$ в любые наперед заданные голоморфные функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, разложения которых не содержат свободных членов.

Доказательство. Полагая

$$z_i = u_i + \varphi_i,$$

мы приведем уравнения (1) к новым уравнениям, у которых функции X_s и Z_i заменяются функциями такого же вида. Следовательно, достаточно показать, что для уравнений (1) существует система решений z_i, обладающих всеми перечисленными в теореме свойствами и обращающихся в нуль при $t=t_0$.

Поступая так же, как и при доказательстве теоремы 1, мы придем к уравнению (6), которое обладает единственным решением:

$$A_i^{(m_1\ldots m_n)}=-e^{-\sum\limits_{s=1}^{n} m_s\int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\sum\limits_{s=1}^{n} m_s\int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt}\, C_i^{(m_1\ldots m_n)}\,dt,$$

обращающимся в нуль при $t=t_0$.

Можно показать, что при условии (10) для всякой пары положительных чисел t_0 и $t>t_0$ имеют место неравенства

$$e^{\int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt}\geqslant\frac{1}{M}e^{\alpha(t-t_0)},$$

где $M\geqslant 1$ и α—положительные постоянные, независящие от t_0. Отсюда, как следствие, находим

$$|A_i^{(m_1\ldots m_n)}|<\frac{M^m}{m\alpha}\overline{C}_i^{(m_1\ldots m_n)},$$

и дальнейшее доказательство ничем не будет отличаться от доказательства теоремы 1.

Свердловский
государственный университет

Поступило
5 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, n° 30. [2] Poincaré, Acta Mathem., t. 13, p. 36. [3] Персидский, Изв. Физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те, т. VIII (1936—1937). [4] O. Perron, Math. ZS., Bd. 31.