Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 5

АСТРОНОМИЯ

М. Ф. СУББОТИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ n ТЕЛ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 13 III 1940)

1. Пусть n материальных точек с массами $m_0, \ldots, m_{n-1}$ движутся под влиянием взаимного притяжения по закону Ньютона. Обозначая через Δ_{ij} расстояние между точками m_i и m_j в момент t и полагая

$$M = m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1},$$

мы можем написать следующее, хорошо известное соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum m_i m_j \Delta_{ij}^2 = fM \sum m_i m_j \Delta_{ij}^{-1} + h, \tag{1}$$

открытое Лагранжем для задачи трех тел и обобщенное Якоби на задачу n тел. Через f обозначена постоянная притяжения, а через h — постоянная интегрирования.

Введем новые переменные E_{ij}, связанные с Δ_{ij} такими соотношениями

$$\frac{dE_{ij}}{dt} = n_{ij} a_{ij} \Delta_{ij}^{-1}, \tag{2}$$

где n_{ij} и a_{ij} — постоянные величины, которые будут в дальнейшем определены ближе. Тогда

$$\frac{d^2\Delta_{ij}^2}{dt^2} = 2n_{ij} a_{ij} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Delta_{ij}}{dE_{ij}}\right),$$

и потому после интегрирования соотношение (1) дает

$$\sum m_i m_j n_{ij} a_{ij} \frac{d\Delta_{ij}}{dE_{ij}} = fM \sum m_i m_j (n_{ij} a_{ij})^{-1} E_{ij} + ht + \text{const},$$

или

$$\sum m_i m_j \left\{(n_{ij} a_{ij})^2 \frac{d^2 t}{dE_{ij}^2} - (n_{ij} a_{ij})^{-1} fME_{ij}\right\} = ht + \text{const}, \tag{3}$$

так как

$$\frac{d\Delta_{ij}}{dE_{ij}} = \frac{d\left(n_{ij} a_{ij} \dfrac{dt}{dE_{ij}}\right)}{dE_{ij}} = n_{ij} a_{ij} \frac{d^2 t}{dE_{ij}^2}.$$

Пользуясь неопределенностью, остающейся в выборе постоянных n_{ij} и a_{ij}, положим

$$h = -fM \sum m_i m_j a_{ij}^{-1}. \tag{4}$$

Если $a_{ij}^{-1} \neq 0$, то наложим еще дополнительное условие

$$n_{ij}^2 a_{ij}^3 = fM; \tag{5}$$

если же $a_{ij}^{-1} = 0$, т. е. соответствующий член в сумме (4) отсутствует, то положим

$$(n_{ij} a_{ij})^2 = \frac{fM}{2q_{ij}}, \tag{6}$$

а соответствующую переменную E_{ij} обозначим для отличия через σ_{ij}.

Таким образом, учитывая все могущие здесь встретиться возможности, уравнение (3) можно написать следующим образом:

$$\sum{}' m_i m_j a_{ij}^{-1} \left\{ \frac{d^2 t}{dE_{ij}^2} + t - n_{ij}^{-1} E_{ij} \right\} + \\ + \sum{}'' m_i m_j (2q_{ij})^{-1} \left\{ \frac{d^2 t}{d\sigma_{ij}^2} - \frac{(2q_{ij})^{3/2}}{\sqrt{fM}} \sigma_{ij} \right\} = \text{const}, \tag{7}$$

где суммирования $\sum'$ и $\sum''$ распространяются соответственно на значения индексов i, j, для которых $a_{ij} \neq \infty$ и $a_{ij} = \infty$.

Этому линейному уравнению в частных производных 2-го порядка должны удовлетворять все те выражения t через переменные E_{ij} и σ_{ij}, которые можно получить из соотношений

$$E_{ij} = E_{ij}(t), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t),$$

вытекающих из полного решения задачи n тел, и уравнений (2).

2. Уравнение (7) можно рассматривать как обобщение уравнения Кеплера, в его дифференциальной форме, на задачу n тел. Действительно, если $n = 2$, то это уравнение приводится или к виду ($E_{01} = E$, $n_{01} = n$)

$$\frac{d^2 t}{dE^2} + t - n^{-1} E = \text{const}, \tag{8}$$

если $h \neq 0$, или к виду

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} - \frac{(2q)^{3/2}}{\sqrt{fM}} \sigma = \text{const}, \tag{9}$$

если $h = 0$.

Но уравнение (8) эквивалентно соотношению

$$n(t - T) = E - e \sin E,$$

что представляет уравнение Кеплера для эллиптического ($a > 0$, n и E вещественны) или гиперболического ($a < 0$, n и E — мнимые) движений.

Уравнение (9) эквивалентно, если опять ограничиться только существенными произвольными постоянными, такому:

$$\frac{\sqrt{fM}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (t - T) = \sigma + \frac{1}{3} \sigma^3,$$

заменяющему уравнение Кеплера в случае параболического движения.

3. Другой частный случай, когда (7) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, это — случай лагранжева движения n тел. Этим именем назовем движение, при котором все расстояния Δ_{ij} сохраняют постоянные отношения. В случае такого движения мы можем, в силу соотношений (2), положить $E_{ij} = l_{ij} E$, где l_{ij} — постоянные коэффициенты. Подставляя эти выражения в уравнение (3) и обозначая

через A и B постоянные величины, для определения E получим уравнение

$$A \frac{d^2 t}{dE^2} - ht - BE = \text{const}.$$

Если $h \neq 0$, то это уравнение дает

$$N(t-T) = E - \mathcal{E} \sin E, \tag{10}$$

где N, $\mathcal{E}$ и T — постоянные, и потому из соотношений (2) будем иметь

$$\Delta_{ij} = n_{ij} a_{ij} l_{ij}^{-1} N^{-1} (1 - \mathcal{E} \cos E). \tag{11}$$

Если $h = 0$, то, заменяя E через $A^{\frac{1}{3}} B^{-\frac{1}{3}} \sigma$, найдем

$$N_1 (t-T) = \sigma + \frac{1}{3} \sigma^3, \tag{12}$$

$$\Delta_{ij} = n_{ij} a_{ij} l_{ij}^{-1} N_1^{-1} (1 + \sigma^2), \tag{13}$$

т. е. формулы параболического движения.

Итак, в случае лагранжева движения взаимные расстояния определяются либо формулами (10), (11), представляющими эллиптическое или гиперболическое движение, либо формулами (12), (13), представляющими параболическое движение.

Это предположение, обобщающее свойство лагранжева движения, давно известное для задачи трех тел, на случай задачи n тел, является прямым следствием того факта, что уравнение (1) приводится в рассматриваемом случае к виду, соответствующему задаче двух тел.

4. Уравнение (7) позволяет получить некоторые заключения относительно роста взаимных расстояний Δ_{ij}, когда эти расстояния стремятся к бесконечности. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь общий принцип получения таких заключений. Рассмотрим самый простой случай, когда сумма всех членов уравнения (7) за исключением одного представляет ограниченную функцию. Опуская индексы у выделенного члена, мы можем написать это уравнение в одной из двух форм:

$$\frac{d^2 t}{dE^2} + lt = n^{-1} E + \Phi,$$

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} = \frac{2q^{3/2}}{\sqrt{fM}} \sigma + \Psi,$$

где Φ и Ψ — ограниченные функции.

Используя это последнее обстоятельство и уравнение (2), легко показать, что рост расстояния Δ, соответствующего выделенному члену, при $t \to \pm\infty$, характеризуется во всех случаях равенством $\Delta = O(|t|)$.

Ленинградский государственный университет

Поступило
3 I 1940