Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. И. ЛУРЬЕ и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО-СКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 2 III 1940)

Изгиб силой. В трех предшествующих заметках [1] нами даны общие уравнения задачи Сен-Венана для естественно-скрученных стержней и их приближенные решения для случаев растяжения, кручения и изгиба парой. Чтобы иметь исчерпывающее решение задачи Сен-Венана для естественно-скрученного стержня, остается еще рассмотреть задачу об изгибе такого стержня силой, направленной вдоль одной из главных осей инерции торцевого сечения. Эта задача рассматривается в настоящей заметке.

Нулевое приближение при изгибе силой W, направленной по оси x_1 в сечении $x_3=l$, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_0^{11}=\sigma_0^{22}=\sigma_0^{12}=0,\\
&\sigma_0^{33}=-\frac{W}{I}x_1(l-x_3),\\
&\sigma_0^{13}=\mu\frac{\partial M}{\partial x_1}-\mu\alpha x_2-\frac{\lambda W}{4(3\lambda+2\mu)I}x_1^2-\frac{3\lambda+4\mu}{4(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_2^2,\\
&\sigma_0^{23}=\mu\frac{\partial M}{\partial x_2}+\mu\alpha x_1-\frac{5\lambda+4\mu}{2(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1x_2;
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_0^1=-\alpha x_2x_3+\frac{\lambda W}{2\mu(3\lambda+2\mu)I}\left[\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)(l-x_3)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\left(lx_3^2-\frac{1}{3}x_3^3\right)\right],\\
&u_0^2=\alpha x_1x_3+\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1x_2(l-x_3),\\
&u_0^3=M(x_1,x_2)-\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}\left[x_1\left(lx_3-\frac{1}{2}x_3^2\right)+x_1x_2^2\right].
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Здесь $M(x_1,x_2)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая на контуре условию:

$$\frac{dM}{d\nu}=\alpha\left(x_2\frac{dx_2}{ds}+x_1\frac{dx_1}{ds}\right)+\left(\frac{\lambda}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1^2+\frac{3\lambda+4\mu}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_2^2\right)\frac{dx_2}{ds}-$$
$$-\frac{5\lambda+4\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1x_2\frac{dx_1}{ds}.\tag{3}$$

Уравнения (17) 1-го сообщения [1] дают:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1^{11} &= \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} + \frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{I}x_2x_3(2l-x_3) - \\
&\quad - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}(x_1^2-x_2^2)x_2 - 2\mu\alpha x_2^2, \\
\sigma_1^{22} &= \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^2}{\partial x_2} + \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{I}x_1x_2 - 2\mu\alpha x_1^2, \\
\sigma_1^{33} &= \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^3}{\partial x_3} + 2\mu\left(x_2\frac{\partial M}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial M}{\partial x_2}\right) + \\
&\quad + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{I}\left(2x_1^2x_2 - x_2^3 + \frac{1}{2}x_2x_3^2 - lx_3x_2\right), \\
\sigma_1^{12} &= \mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^2}{\partial x_1}\right) + \frac{\lambda}{4(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1(x_1^2-3x_2^2) - \\
&\quad - \frac{\lambda+\mu}{2(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_3x_1(2l-x_3) + 2\mu\alpha x_1x_2, \\
\sigma_1^{13} &= \mu\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1^3}{\partial x_1}\right) - \frac{W}{2I}x_1x_2(l-x_3), \\
\sigma_1^{23} &= \mu\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1^3}{\partial x_2}\right) + \frac{7\lambda+4\mu}{4(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1^2(l-x_3) + \\
&\quad + \frac{\lambda}{4(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_2^2(l-x_3) + \frac{\lambda+\mu}{6(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}\left((l-x_3)^3 - 3l^2(l-x_3) + 2l^3\right).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Уравнения равновесия в первом приближении

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_1^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_1^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_1^{13}}{\partial x_3} - 2\sigma_0^{23} &= 0, \\
\frac{\partial\sigma_1^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_1^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_1^{23}}{\partial x_3} + 2\sigma_0^{13} &= 0, \\
\frac{\partial\sigma_1^{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_1^{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_1^{33}}{\partial x_3} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где σ_0^{13} и σ_0^{23} даются формулами (1). Введем в рассмотрение систему напряжений τ^{ik}, связанных с перемещениями первого приближения соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\tau^{11} = \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1}; \quad \tau^{22} = \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^2}{\partial x_2}; \quad \tau^{33} = \lambda\vartheta_1 + 2\mu\frac{\partial u_1^3}{\partial x_3}, \\
&\tau^{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial x_2}\right); \quad \tau^{23} = \mu\left(\frac{\partial u_1^3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^2}{\partial x_3}\right); \quad \tau^{13} = \mu\left(\frac{\partial u_1^3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Уравнения (4), (5), (6) показывают, что τ^{ik} удовлетворяют следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tau^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau^{13}}{\partial x_3} + X^{(1)} &= 0, \\
\frac{\partial\tau^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau^{23}}{\partial x_3} + X^{(2)} &= 0, \\
\frac{\partial\tau^{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau^{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau^{33}}{\partial x_3} + X^{(3)} &= 0,
\end{aligned}$$

где составляющие «объемной силы» $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ даются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
X^{(1)} &= \frac{4\lambda+5\mu}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{I}x_1x_2 - 2\mu\frac{\partial M}{\partial x_2}, \\
X^{(2)} &= -\frac{\lambda+2\mu}{2(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_1^2 - \frac{5\lambda+4\mu}{2(3\lambda+2\mu)}\frac{W}{I}x_2^2 + 2\mu\frac{\partial M}{\partial x_1}, \\
X^{(3)} &= -\frac{3(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{I}x_2(l-x_3).
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Искомую систему напряжений разобьем на две части

$$\tau^{ik} = {}_1\tau^{ik} + {}_2\tau^{ik}$$

и потребуем, чтобы ${}_1\tau^{ik}$ были решением уравнений равновесия с «объемными силами» $X_1^{(1)} = -2\mu \frac{\partial M}{\partial x_2}$, $X_1^{(2)} = 2\mu \frac{\partial M}{\partial x_1}$, $X_1^{(3)} = 0$.

Если составить уравнение Бельтрами-Митчелля для ${}_1\tau^{ik}$, то частным решением уравнений равновесия и уравнений Бельтрами будет следующая система напряжений

$$\left.\begin{aligned} {}_1\tau^{11} &= -2\mu N(x_1, x_2), \\ {}_1\tau^{22} &= -2\mu N(x_1, x_2), \\ {}_1\tau^{33} &= -\frac{2\mu\lambda}{\lambda+\mu} N(x_1, x_2), \\ {}_1\tau^{12} &= {}_1\tau^{13} = {}_1\tau^{23} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $N(x_1, x_2)$ — гармоническая функция сопряжения с $M(x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial N}{\partial x_1} = -\frac{\partial M}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial N}{\partial x_2} = \frac{\partial M}{\partial x_1}.$$

Если для напряжений ${}_2\tau^{ik}$ составить уравнение равновесия в перемещениях, затем найти их частное решение и вычислить напряжения ${}_2\tau^{ik}$, ему соответствующие, то окажется:

$$\left.\begin{aligned} {}_2\tau^{11} &= -\frac{3\lambda(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2 (l-x_3)^2 - \frac{4\lambda+5\mu}{2(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2 x_1^2 + \\ &\quad + \frac{\lambda(5\lambda+4\mu)}{6(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2^3, \\ {}_2\tau^{22} &= -\frac{3\lambda(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2 (l-x_3)^2 - \frac{\lambda(4\lambda+5\mu)}{2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2 x_1^2 + \\ &\quad + \frac{5\lambda+4\mu}{6(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2^3, \\ {}_2\tau^{33} &= -\frac{3(\lambda+\mu)}{2(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2 (l-x_3)^2 - \frac{\lambda(4\lambda+5\mu)}{2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_2 x_1^2 + \\ &\quad + \frac{\lambda(5\lambda+4\mu)}{6(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_1^3, \\ {}_2\tau^{12} &= \frac{5\lambda^2+9\mu\lambda+4\mu^2}{6(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} x_1^3, \\ {}_2\tau^{23} &= \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)} \frac{W}{I} (l-x_3)^3, \\ {}_2\tau^{13} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Возвращаясь теперь к определению системы напряжений σ_1^{ik}, можно, пользуясь формулами (4) и найденными выражениями для τ^{ik}, свести решение задачи к нахождению некоторой системы напряжений $\sum^{ik}$, удовлетворяющей однородным уравнениям равновесия в объеме, однородным уравнениям Бельтрами и следующим граничным условиям на боковой поверхности:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum^{11} \nu_1 + \sum^{12} \nu_2 &= \Phi_1, \\ \textstyle\sum^{12} \nu_1 + \sum^{22} \nu_2 &= \Phi_2, \\ \textstyle\sum^{13} \nu_1 + \sum^{23} \nu_2 &= \Phi_3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Φ_1, Φ_2 и Φ_3 являются функциями координат точек боковой поверхности. Явное их выражение легко получить из сказанного выше. Оно имеет весьма громоздкий вид и поэтому здесь не приводится.

Отметим только, что Φ_1, Φ_2 и Φ_3 являются полиномами степени не выше третьей относительно $(l - x_3)$, коэффициенты которых зависят от x_1 и x_2.

Следовательно, определение $\sum^{ik}$ сводится к нахождению напряжений в призматическом стержне, на боковую поверхность которого действуют силы, полиномиально зависящие от координаты, направленной по оси стержня.

Метод и схема решения этой задачи для полиномов любой степени были даны E. Almansi (²).

Таким образом задача об изгибе естественно-скрученного стержня является принципиально решенной. Вместе с тем задачу Сен-Венана для естественно-скрученного стержня можно считать решенной в первом приближении *.

Ленинградский индустриальный институт

Поступило
8 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Лурье и Г. Ю. Джанелидзе, ДАН, XXIV, № 1, 3, 4 (1939).
² E. Almansi, Rend. Ac. Lincei, серия 5, т. X, стр. 333 и 400 (1901).

* Пользуемся случаем исправить погрешность в нашем предыдущем сообщении (ДАН, XXIV, № 3): повсюду коэффициент $\frac{5\lambda+3\mu}{3\lambda+2\mu}$ надо заменить на $\frac{11(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}$.