Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Р. ШУРА-БУРА

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КАК ОБРАЗЫ ДИСКОНТИНУУМОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 III 1940)

Как известно [1], среди всех хаусдорфовых пространств компакты, и только они, являются непрерывными образами канторовского совершенного множества. П. С. Александров доказал [2], что любое бикомпактное хаусдорфово пространство веса τ есть непрерывный образ некоторого замкнутого множества, лежащего в дисконтинууме D_τ (дисконтинуум D_τ определяется как топологическое произведение τ экземпляров пространства, состоящего из двух изолированных точек).

В настоящей заметке показывается, что любое замкнутое подмножество из D_τ есть непрерывный образ всего D_τ; кроме того известно [3], что непрерывный образ бикомпакта веса $\leqslant \tau$ есть бикомпакт веса $\leqslant \tau$. Объединяя все эти результаты, получаем следующую теорему.

Теорема. *Среди хаусдорфовых пространств все бикомпакты веса $\leqslant \tau$, и только они, являются непрерывными образами дисконтинуума D_τ.*

Доказательство. Предположим, что пары точек, произведением которых является D_τ, вполне упорядочены раз навсегда по типу ω_τ, где ω_τ — наименьшее порядковое число мощности τ. Каждую точку $x \in D_\tau$ можно рассматривать как некоторую вполне упорядоченную по типу ω_τ систему нулей и единиц:

$$x = \{x^\nu\}, \quad \nu < \omega_\tau, \quad x^\nu = 0 \text{ либо } 1.$$

Числа x^ν будем называть координатами точки x, причем окрестностью этой точки является совокупность точек, у которых данные в конечном числе координаты совпадают с соответствующими координатами точки x, а остальные произвольны. Если фиксированы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$-ая координаты, то соответствующую окрестность точки x обозначим через $U_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_s}(x)$. D_τ будем обозначать также D_{ω_τ}.

Заменяя каждую точку $x \in D_{\omega_\tau}$ $x = \{x^\nu\}$, $\nu < \omega_\tau$ ее «α-отрезком» $x_\alpha = \{x^\nu\}$, $\nu < \alpha$, получим — при топологизации, аналогичной только что изложенной,—пространство D_α и непрерывное отображение $S_\alpha x = x_\alpha$ пространства D_{ω_τ} на пространство D_α.

Для того чтобы убедиться в непрерывности S_α, достаточно заметить, что $S_\alpha^{-1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x_\alpha)] = U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x)$, если $S_\alpha x = x_\alpha$.

Если $\alpha < \beta \leqslant \omega_\tau$, то каждой точке $x_\beta \in D_\beta$

$$x_\beta = \{x^\nu\}, \quad \nu < \beta$$

пространства D_β соответствует точка

$$x_\alpha = S_\alpha^\beta x_\beta = \{x^\nu\}, \quad \nu < \alpha$$

пространства D_α, причем S_α^β есть непрерывное, одновременно замкнутое и открытое отображение пространства D_β на D_α, непрерывность S_α^β можно доказать совершенно так же, как выше доказывается непрерывность $S_\alpha \equiv S_\alpha^{\omega_\tau}$. Отображение S_α^β замкнуто, как всякое непрерывное отображение бикомпакта, и открыто, так как образ окрестности из D_β есть в свою очередь окрестность из D_α. Отметим также очевидное соотношение: $S_\alpha^\beta S_\beta^\gamma (x_\gamma) = S_\alpha^\gamma (x_\gamma)$, которое понадобится в дальнейшем.

Пусть F — некоторое замкнутое подмножество D_{ω_τ}. Полагаем:

$$F_\alpha = S_\alpha F \subseteq D_\alpha, \qquad F^\alpha = S_\alpha^{-1} F_\alpha.$$

F_α замкнуто, как образ замкнутого F, а F^α замкнуто, как прообраз замкнутого F_α. Кроме того

$$F = \bigcap_{\alpha < \omega_\tau} F^\alpha.$$

В самом деле, $F \subseteq \bigcap F^\alpha$, так как $F \subseteq F^\alpha$ при всяком α; с другой стороны, если $z \overline{\in} F$ и $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}(z)$ — окрестность z, не пересекающаяся с F, то $z \overline{\in} F^\alpha$ для $\alpha > \alpha_1$, $\alpha > \alpha_2, \ldots, \alpha > \alpha_s$, так что и подавно $z \overline{\in} \bigcap\limits_\alpha F^\alpha$, другими словами $F \supseteq \bigcap\limits_\alpha F^\alpha$ и окончательно $F = \bigcap\limits_\alpha F^\alpha$. Аналогично, если $\lambda < \omega_\tau$ — трансфинитное число второго рода и Φ_λ — любое замкнутое множество D_λ, то, полагая для $\alpha < \lambda$ $\Phi_\alpha = S_\alpha^\lambda \Phi_\lambda$ и $\Phi_\lambda^\alpha = (S_\alpha^\lambda)^{-1} \Phi_\alpha$, будем иметь $\Phi_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha < \lambda} \Phi_\lambda^\alpha$.

Приступим теперь к построению непрерывного отображения пространства D_τ на его замкнутое подмножество F. В дальнейшем буква F будет обозначать это фиксированное замкнутое множество и $F_\alpha = S_\alpha F$.

Построим для каждого $\alpha \leqslant \omega_\tau$ непрерывное отображение φ_α пространства D_α на F_α так, чтобы для $\alpha < \beta$ и $x_\beta \in D_\beta$

$$\varphi_\alpha S_\alpha^\beta (x_\beta) = S_\alpha^\beta \varphi_\beta (x_\beta). \tag{K}$$

φ_{ω_τ} и будет осуществлять искомое непрерывное отображение всего D_τ на F.

Построение будем вести индуктивно, отдельно для трансфинитов первого и второго родов.

При $\alpha = 1$ и D_α и F_α пусты, отображение φ_α будет единственным отображением пустого множества на пустое. Пусть определено φ_α, определим $\varphi_{\alpha+1}$ следующим образом:

Пусть $x_{\alpha+1} \in D_{\alpha+1}$ — произвольная точка пространства $D_{\alpha+1}$, полагаем $S_\alpha^{\alpha+1} x_{\alpha+1} = x_\alpha$ и $\varphi_\alpha (x_\alpha) = y_\alpha$.

Обозначим через $x'_{\alpha+1}$ точку $D_{\alpha+1}$, которая отличается от $x_{\alpha+1}$ лишь своей α-ой координатой, т. е. $S_\alpha^{\alpha+1} x'_{\alpha+1} = S_\alpha^{\alpha+1} x_{\alpha+1}$.

Определим сразу $\varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1})$ и $\varphi_{\alpha+1}(x'_{\alpha+1})$. Возможны два случая: либо обе точки $(S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} y_\alpha$ содержатся в $F_{\alpha+1}$, либо лишь одна из двух; в первом случае обозначим эти точки через $y_{\alpha+1}$ и $y'_{\alpha+1}$, во втором случае точку, принадлежащую $F_{\alpha+1}$, обозначим через $y_{\alpha+1}$.

В первом случае полагаем:

$$\varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1}) = y_{\alpha+1},$$
$$\varphi_{\alpha+1}(x'_{\alpha+1}) = y'_{\alpha+1},$$

причем, для определенности, обозначения выбираем так, чтобы у $x_{\alpha+1}$ и $y_{\alpha+1}$, и, следовательно, у $x'_{\alpha+1}$ и $y'_{\alpha+1}$ совпадали α-ые координаты, т. е. $x^\alpha = y^\alpha$. Во втором случае полагаем: $\varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1}) = \varphi_{\alpha+1}(x'_{\alpha+1}) = y_{\alpha+1}$.

Для построенного таким образом отображения $\varphi_{\alpha+1}$ имеем очевидно:

$$\varphi_\alpha S_\alpha^{\alpha+1}(x_{\alpha+1}) = S_\alpha^{\alpha+1} \varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1});$$

кроме того для $\gamma < \alpha$ имеем:

$$\varphi_\gamma S_\gamma^{\alpha+1}[(S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_\alpha] = \varphi_\gamma S_\gamma^\alpha S_\alpha^{\alpha+1} (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_\alpha = \varphi_\gamma S_\gamma^\alpha x_\alpha,$$

но, в силу индуктивного предположения, для φ_α и $\varphi_\gamma (\gamma < \alpha)$ справедливо (K), т. е.

$$\varphi_\gamma S_\gamma^\alpha (x_\alpha) = S_\gamma^\alpha \varphi_\alpha (x_\alpha);$$

далее

$$S_\gamma^\alpha \varphi_\alpha (x\ ) = S_\gamma^\alpha S_\alpha^{\alpha+1} (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} \varphi_\alpha (x_\alpha) = S_\gamma^{\alpha+1} \varphi_{\alpha+1} [(S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_\alpha],$$

так что окончательно получаем

$$\varphi_\gamma S_\gamma^{\alpha+1} (x_{\alpha+1}) = S_\gamma^{\alpha+1} \varphi_{\alpha+1} (x_{\alpha+1}),$$

где $x_{\alpha+1} \in D_{\alpha+1}$ — произвольная точка пространства $D_{\alpha+1}$. Таким образом свойство (K) оказывается выполненным и для $\varphi_{\alpha+1}$.

Пусть φ_α построено для всех $\alpha < \lambda$, где λ — трансфинитное число 2-го рода. Построим φ_λ. Для этого в произвольной точке $x_\lambda \in D_\lambda$

$$x_\lambda = \{x^\nu\}, \quad \nu < \lambda,$$

полагаем

$$\varphi_\lambda (x_\lambda) = y_\lambda = \{y^\nu\}, \quad \nu < \lambda,$$

где y^ν определяется следующим образом: берем α, удовлетворяющее условию $\nu < \alpha < \lambda$;

для φ_α имеем

$$\varphi_\alpha S_\alpha^\lambda (x_\lambda) = \{y^\mu\}, \quad \mu < \alpha;$$

стоящее справа y^ν и есть искомое.

Из условия (K) для φ_α при $\alpha < \lambda$ с очевидностью следует, что определенная таким образом ν-товая координата y_λ не зависит от выбора α и определяется, таким образом, однозначно. Кроме того для φ_λ выполнено условие (K) по самому определению отображения.

Докажем, что $\varphi_\lambda (D_\lambda) = F_\lambda$. Пусть

$$\varphi_\lambda (x_\lambda) = y_\lambda = \{y^\nu\}, \quad \nu < \lambda.$$

При любом $\alpha < \lambda$ имеем:

$$S_\alpha^\lambda y_\lambda = \varphi_\alpha S_\alpha^\lambda x_\lambda \in F_\alpha = S_\alpha^\lambda F_\lambda,$$

откуда

$$(S_\alpha^\lambda)^{-1} S_\alpha^\lambda y_\lambda \subseteq (S_\alpha^\lambda)^{-1} F_\alpha = F_\lambda^\alpha,$$

но так как

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}(S_\alpha^\lambda)^{-1}S_\alpha^\lambda y_\lambda = y_\lambda \quad \text{и} \quad \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\lambda^\alpha = F_\lambda,$$

получаем

$$y_\lambda \in F_\lambda,$$

т. е. $\varphi_\lambda(D_\lambda) \subseteq F_\lambda$.

Для доказательства обратного включения достаточно заметить, что $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x_\alpha$ для любого $\alpha \leqslant \omega_\tau$ и для каждой точки $x_\alpha \in F_\alpha$; это очевидно для $\alpha = 1$, сохраняется при переходе от α к $\alpha+1$ и от $\alpha < \lambda$ к $\lambda = \lim \alpha$ и справедливо, следовательно, для всех $\alpha \leqslant \omega_\tau$.

Остается доказать, что отображение φ_α пространства D_α на F_α непрерывно, каково бы ни было α.

I. Отображение φ_1 непрерывно. Доказательство излишне.

II. Из непрерывности φ_α следует непрерывность $\varphi_{\alpha+1}$.

Докажем отдельно:

а) Какова бы ни была окрестность $V_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}(y_{\alpha+1})$ точки $y_{\alpha+1} = \varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1})$, удовлетворяющая условию $\max[\beta_1, \ldots, \beta_s] < \alpha$, найдется окрестность $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha+1})$ такая, что $\varphi_{\alpha+1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha+1})] \subseteq V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_{\alpha+1})$.

б) Если $y_{\alpha+1} = \varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1})$, то всегда найдется окрестность

$$U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha+1})$$

такая, что

$$\varphi_{\alpha+1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(x_{\alpha+1})] \subseteq V_\alpha(y_{\alpha+1}),$$

Так как произвольная окрестность точки $y_{\alpha+1}$ есть либо окрестность $V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_{\alpha+1})$, удовлетворяющая условию $\max[\beta_1, \ldots, \beta_s] < \alpha$, либо окрестность $V_\alpha(y_{\alpha+1})$, либо пересечение окрестностей этих двух типов, а образ пересечения содержится в пересечении образов, то, соединяя а) и б), получим: какова бы ни была окрестность $V_{\gamma_1,\ldots,\gamma_r}(y_{\alpha+1})$ точки $y_{\alpha+1} = \varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1})$, всегда найдется окрестность $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(x_{\alpha+1})$ точки $x_{\alpha+1}$ такая, что

$$\varphi_{\alpha+1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(x_{\alpha+1})] \subseteq V_{\gamma_1,\ldots,\gamma_r}(y_{\alpha+1}),$$

иными словами, отображение $\varphi_{\alpha+1}$ непрерывно.

Перейдем к доказательству а) и б).

а) Очевидно, что

$$S_\alpha^{\alpha+1} V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_{\alpha+1}) = V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_\alpha),$$

где
$$y_\alpha = S_\alpha^{\alpha+1} y_{\alpha+1} = S_\alpha^{\alpha+1}\varphi_{\alpha+1}(x_{\alpha+1}) = \varphi_\alpha S_\alpha^{\alpha+1} x_{\alpha+1} = \varphi_\alpha(x_\alpha).$$

В силу непрерывности φ_α найдется окрестность $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_\alpha)$ такая, что

$$\varphi_\alpha[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_\alpha)] \subseteq V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_\alpha).$$

Очевидно, что и

$$F_{\alpha+1} \cap (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1}\varphi_\alpha[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_\alpha)] \subseteq F_{\alpha+1} \cap (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_\alpha),$$

но

$$F_{\alpha+1} \cap (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1}\varphi_\alpha[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_\alpha)] = \varphi_{\alpha+1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha+1})]$$

и

$$F_{\alpha+1} \cap (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_\alpha) \subseteq V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_{\alpha+1}),$$

откуда следует, что

$$\varphi_{\alpha+1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha+1})] \subseteq V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_{\alpha+1}),$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства б) нам потребуется следующая лемма:

Обозначим через $M_{\alpha+1}$ множество точек $x_{\alpha+1} \in D_{\alpha+1}$, для которых обе точки $(S_\alpha^{\alpha+1})^{-1}[\varphi_\alpha(S_\alpha^{\alpha+1} x_{\alpha+1})]$ принадлежат к $F_{\alpha+1}$, через $N_{\alpha+1,0}$ множество точек из дополнения к $M_{\alpha+1}$, для которых α-ая координата точки $F_{\alpha+1} \bigcap (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} \varphi_\alpha(S_\alpha^{\alpha+1} x_{\alpha+1})$ равна 0 и $N_{\alpha+1,1} = D_{\alpha+1} - (M_{\alpha+1} + N_{\alpha+1,0})$.

Покажем, что $M_{\alpha+1}$, $N_{\alpha+1,0}$ и $N_{\alpha+1,1}$ суть одновременно замкнутые и открытые подмножества $D_{\alpha+1}$.

Обозначим соответственно через P_α, $Q_{\alpha,0}$ и $Q_{\alpha,1}$ множества точек $y_\alpha \in F_\alpha$, для которых обе точки $(S_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(y_\alpha)$, лишь та из двух, которая имеет α-ую координату, равную 0, лишь та, которая имеет α-ую координату, равную 1, содержатся в $F_{\alpha+1}$.

Так как

$$M_{\alpha+1} = (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(\varphi_\alpha)^{-1} P_\alpha,$$

$$N_{\alpha+1,0} = (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(\varphi_\alpha)^{-1} Q_{\alpha,0} \text{ и } N_{\alpha+1,1} = (S_\alpha^{\alpha+1})^{-1} \varphi_\alpha^{-1} Q_{\alpha,1}$$

для доказательства открытости и замкнутости множеств $M_{\alpha+1}$, $N_{\alpha+1,0}$ и $N_{\alpha+1,1}$ достаточно показать открытость и замкнутость множеств P_α, $Q_{\alpha,0}$ и $Q_{\alpha,1}$ относительно F_α. Обозначим соответственно через $F_{\alpha+1,0}$, $F_{\alpha+1,1}$ множество точек $y_{\alpha+1} \in F_{\alpha+1}$, у которых α-ая координата равна 0, равна 1. $F_{\alpha+1,0}$ и $F_{\alpha+1,1}$ суть одновременно замкнутые и открытые подмножества $F_{\alpha+1}$. Кроме того

$$P_\alpha = S_\alpha^{\alpha+1} F_{\alpha+1,0} \bigcap S_\alpha^{\alpha+1} F_{\alpha+1,1},$$

$$Q_{\alpha,0} = F_\alpha - S_\alpha^{\alpha+1} F_{\alpha+1,1} \text{ и } Q_{\alpha,1} = F_\alpha - S_\alpha^{\alpha+1} F_{\alpha+1,0}.$$

Так как отображение $S_\alpha^{\alpha+1}$ и замкнутое и открытое, то множества P_α, $Q_{\alpha,0}$ и $Q_{\alpha,1}$ одновременно замкнуты и открыты, что и требовалось доказать.

б). Выберем $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}}(x_{\alpha+1})$ так, чтобы эта окрестность целиком содержалась в том из множеств $M_{\alpha+1}$, $N_{\alpha+1,0}$ или $N_{\alpha+1,1}$, к которому принадлежит $x_{\alpha+1}$.

Тогда, как легко проверить:

$$\varphi_{\alpha+1}[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha}(x_{\alpha+1})] \subseteq V_\alpha(y_{\alpha+1}),$$

что и требовалось доказать.

III. Из непрерывности φ_α для всех $\alpha < \lambda$ следует непрерывность φ_λ (здесь λ — трансфинит 2-го рода).

Доказательство аналогично доказательству а): каковы бы ни были $\beta_1 < \lambda, \ldots, \beta_s < \lambda$, найдется такое $\alpha < \lambda$, что $\beta_1 < \alpha, \ldots, \beta_s < \alpha$, поэтому для любой окрестности $V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_\lambda)$ точки $y_\lambda = \varphi_\lambda(x_\lambda) \in F_\lambda$ найдется такая окрестность $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_\lambda)$, что $\varphi_\lambda[U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_\lambda)] \subseteq V_{\beta_1,\ldots,\beta_s}(y_\lambda)$, что и требовалось доказать.

Поступило
14 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Alexandroff, Math. Ann., 96, 126, S. 563; Хаусдорф, Теория множеств, стр. 175. [2] П. С. Александров, ДАН, II, № 2 (1936). [3] П. С. Александров, О бикомпактных расширениях топологических пространств, Мат. сборн., 5, стр. 419 (1939).