Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

МАРК КРЕЙН и СЕЛИМ КРЕЙН

ОБ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОСТРАНСТВА ВСЕХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ХАУСДОРФОВОМ БИКОМПАКТНОМ МНОЖЕСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 III 1940)

1. В дальнейшем мы будем обозначать через E линейное полуупорядоченное пространство, т. е. линейное множество, в котором для некоторых элементов x определено соотношение $x > \theta$ (θ — нулевой элемент множества), удовлетворяющее следующим аксиомам:

Аксиома I. *Если $x > \theta$, то $x \neq \theta$.*

Аксиома II. *Если $x > \theta$ и $y > \theta$, то $x + y > \theta$.*

Аксиома III. *Для всякого x существует такой элемент $x_+ \geqslant \theta$ (положительная часть x), что $x_+ - x \geqslant \theta$ и $x' - x_+ \geqslant \theta$, каков бы ни был элемент x', удовлетворяющий условиям: $x' \geqslant \theta$, $x' - x \geqslant \theta$.*

Аксиома IV. *Если $\lambda > 0$ и $x > \theta$, то $\lambda x > \theta$.*

Мы будем писать $x_1 > x_2$ (или, что то же, $x_2 < x_1$), если $x_1 - x_2 > \theta$.

Обозначим через x_- элемент $(-x)_+$ (отрицательная часть $x \in E$) и через $|x|$ элемент $x_+ + x_-$ (абсолютная величина x). Тогда

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_-.$$

Аксиомы I — IV, так же как и различные следствия из них, рассматривались ранее Л. В. Канторовичем [1]. В дальнейшем мы будем предполагать, что кроме аксиом I — IV выполняется еще следующая:

Аксиома V. *В E существует элемент $u > \theta$ такой, что для каждого $x \neq \theta$ ($x \in E$) множество положительных чисел t, для которых $-tu < x < tu$, не пусто и имеет нижнюю грань, отличную от нуля.*

Эту нижнюю грань обозначим через $\|x\|_u$. Легко видеть, что $\|x\|_u$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, т. е.

$$\|x\|_u > 0 \quad \text{при } x \neq \theta, \quad \|\lambda x\|_u = |\lambda| \cdot \|x\|_u$$

и

$$\|x + y\|_u \leqslant \|x\|_u + \|y\|_u \quad (x, y \in E, \ -\infty < \lambda < \infty).$$

При выполнении аксиомы V существует бесчисленное множество элементов u, удовлетворяющих условиям этой аксиомы; однако при этом все нормы $\|x\|_u$ между собой топологически эквивалентны.

Фиксируя определенный элемент u, удовлетворяющий условиям аксиомы V, обозначим через E_u полуупорядоченное пространство E, нормированное с помощью $\|x\|_u$.

Линейный функционал $f(x)$, определенный на E_u ($f \in \overline{E}_u$) и неравный тождественно нулю, будем называть положительным и писать $f > \theta$, если $f(x) \geqslant 0$ для каждого $x > 0$. Используя метод, указанный F. Riesz'ом ([2]) [см. также Л. В. Канторович ([3])], нетрудно показать, что определенное нами соотношение $f > \theta$ превращает сопряженное к E_u пространство линейных функционалов $\overline{E}_u$ в линейное нормированное полуупорядоченное пространство.

Очевидно, что при $f > \theta$

$$\|f\|_u = \sup_{-u<x<u} |f(x)| = f(u).$$

Обозначим через H_u множество положительных функционалов с нормой, равной 1, т. е. совокупность линейных функционалов $f \in \overline{E}_u$ таких, что

$$f > \theta \quad \text{и} \quad f(u) = 1.$$

Легко видеть, что множество H_u регулярно выпукло *, т. е. для любого $f_0 \overline{\in} H_u$ ($f_0 \in \overline{E}_u$) найдется такой элемент $x_0 \in E_u$, что

$$\sup_{f \in H_u} f(x_0) < f_0(x_0).$$

Как показали М. Г. Крейн и Д. П. Мильман ([5]), имеет место следующее общее предложение:

«Пусть $K \subset \overline{E}$—некоторое ограниченное регулярное, выпуклое множество линейных функционалов. Тогда совокупность S экстремальных точек ** множества K не пуста и, более того, K есть наименьшее регулярно выпуклое множество, содержащее S».

Таким образом множество H_u имеет экстремальные точки, совокупность которых обозначим через S_u.

Теорема 1. *Для того чтобы точка $f \in H_u$ была экстремальной точкой для H_u ($f \in S_n$), необходимо и достаточно, чтобы* $(|f x)| = f(|x|)$ $(x \in E_u)$.

Введем теперь в пространстве $\overline{E}_u$ при помощи всевозможных окрестностей $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ $[f_0 \in \overline{E}_u, x_1 \in E_u, \ldots, x_n \in E_u$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\varepsilon > 0]$ слабую топологию [топологию по Тихонову ([6])]; при этом под окрестностью $U(f_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ понимается совокупность всех тех $f \in \overline{E}_u$, для которых

$$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема 2. *Совокупность S_u экстремальных точек для H_u является в слабой топологии хаусдорфовым бикомпактным множеством. Кроме того, если*

1) *E_u — сепарабельно, то S_u — метризуемое компактное множество,*

2) *$\overline{E}$ — сепарабельно, то S_u — счетное метризуемое компактное множество,*

3) *E_u — n-мерно (n — натуральное число), то S_u состоит из n точек.*

При доказательстве этой и следующей (основной) теоремы мы пользовались леммой:

---

* О регулярно выпуклых множествах см. ([4]).

** Точка f выпуклого множества K называется экстремальной, если она не является средней точкой никакого отрезка, принадлежащего K.

Лемма. *Пусть Q — некоторое хаусдорфово бикомпактное пространство, а $E(Q)$ — некоторая линейная совокупность непрерывных на Q функций $\varphi(q)$ $(q \in Q)$, обладающая следующими свойствами:*

1° *Для каждых двух точек $q_1 \in Q$, $q_2 \in Q$ и каждых двух чисел a_1, a_2 найдется функция $\varphi(q) \in E(Q)$ такая, что $\varphi(q_1) = a_1$, $\varphi(q_2) = a_2$.*

2° *Если $\varphi(q) \in E(Q)$, то $|\varphi(q)| \in E(Q)$* *.

Тогда любая непрерывная функция $\psi(q)$ $(q \in E)$ есть предел некоторой равномерно сходящейся последовательности $\{\varphi_n(q)\} \subset E(Q)$.

Сформулируем теперь основную теорему:

Теорема 3. *Сопоставим каждому элементу $x \in E_u$ непрерывную на хаусдорфовом бикомпактном множестве S_u функцию*

$$\varphi_x(f) = f(x) \quad (f \in S_u).$$

Тогда линейное соответствие $x \longleftrightarrow \varphi_x(f)$ обладает следующими свойствами:

1° *Соотношение $x < y$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_x(f) \leqslant u \not\equiv \varphi_y(f)$ $(f \in S_u)$.*

2° $\|x\|_u = \sup|\varphi_x(f)|$ $(f \in S_u)$.

3° $\varphi_u(f) \equiv 1$ $(f \in S_u)$.

4° *Каждая непрерывная функция $\varphi(f)$ $(f \in S_u)$ является пределом некоторой равномерно сходящейся последовательности $\varphi_{x_n}(f)$ $(x_n \in E_u$, $n = 1, 2, \ldots)$.*

Очевидно, что пространство $C(Q)$ всех непрерывных функций, определенных на некотором бикомпактном хаусдорфовом множестве Q, удовлетворяет всем аксиомам I—V, если соотношение $\varphi > \theta$ $(\varphi \in C(Q))$ означает, что $\varphi(q) \geqslant 0$ и $\varphi(q) \not\equiv 0$ $(q \in Q)$; при этом за u можно принять любую непрерывную положительную функцию $u(q) \in C(Q)$. Так как, кроме того, пространство $C(Q)$ полно по норме $\|\varphi\|_u$, то из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Для того чтобы линейное полуупорядоченное пространство E было изоморфно пространству всех непрерывных функций, определенных на некотором бикомпактном хаусдорфовом множестве, необходимо и достаточно, чтобы в нем выполнялась аксиома V и чтобы оно было полным по норме $\|x\|_u$.*

Заметим, что если E n-мерно, то из теорем 2, 4 вытекает, что E изоморфно n-мерному эвклидовому пространству; этот частный факт был установлен недавно А. Юдиным (7).

Следующее следствие теоремы 4 является обобщением одной теоремы E. Čech'а (8).

Теорема 5. *Пусть T — некоторое топологическое пространство, а E — некоторая линейная совокупность ограниченных непрерывных вещественных функций $\psi(t)$ $(t \in T)$, содержащая единицу, полная в смысле равномерной сходимости и такая, что если $\psi \in E$, то и $|\psi| \in E$.*

Тогда существует непрерывное отображение $q = \beta(t)$ пространства T в некоторое бикомпактное хаусдорфово множество Q (определяемое однозначно с точностью до гомеоморфизма) такое, что βT плотно в Q и совокупность E совпадает с совокупностью всех функций $\{\varphi(\beta(t))\}$, где $\varphi(q)$ $(q \in Q)$ — любая непрерывная функция на Q.

Отметим, что линейные пространства, удовлетворяющие аксиомам I, II, IV, V (без аксиомы III), изучались ранее М. Г. Крейном [см. (14), а также (9)]. Этим же автором рассматривалось множество H_u для уста-

* Это требование можно заменить ослабленным: $|\varphi(q)|$ есть предел некоторой равномерно сходящейся последовательности $\{\varphi_n(q)\} \subset E(Q)$.

новления различных теорем, в том числе и теорем об изоморфизме абстрактных пространств (удовлетворяющих аксиомам I, II, IV, V) некоторой части пространства непрерывных функций. На целесообразность рассмотрения экстремальных точек множества H_u обратил внимание авторов Н. Н. Боголюбов.

2. Следующее предложение сближает наши результаты с некоторыми исследованиями И. М. Гельфанда и Г. И. Шилова [10].

Теорема 6. *Пусть пространство E_u полно по норме $\|x\|_u$. Тогда в E_u однозначно определяется коммутативная операция умножения xy $(x, y \in E_u)$, обращающая E_u в кольцо с единицей u, и такая, что $xy \geqslant 0$, если $x > 0$ и $y > 0$. Коль скоро такая операция установлена, то для того чтобы функционал $f \neq 0$ принадлежал S_u, необходимо и достаточно, чтобы $f(xy) = f(x) f(y)$ $(x, y \in E_u)$.*

3. Поясним установленные результаты на одном примере. Этот пример рассматривался недавно И. М. Гельфандом [11] на основе теории нормированных колец, но мы пойдем несколько далее.

Пусть M* — некоторая аддитивная подгруппа группы J всех действительных чисел, а $B(M)$ — совокупность всех почти-периодических функций Бора $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ с показателями Фурье, принадлежащими M. Очевидно, $B(M)$ есть линейное пространство, удовлетворяющее аксиомам I — V, если условиться, что $x > 0$ означает $x(t) \geqslant 0$, $x(t) \not\equiv 0$ $(-\infty < t < \infty)$, а $u(t) \equiv 1$ $(-\infty < t < \infty)$, при этом $B(M)$ полно по норме $\|x\|_u = \sup |x(t)|$ $(-\infty < t < \infty)$.

Как показал А. П. Артеменко [12], относя каждому линейному функционалу $f \in \overline{B(M)}$ функцию $\varphi(\lambda) = f(e^{i\lambda t})$ $(\lambda \in M)$, мы приводим множество всех положительных функционалов $f > 0$ $(f \in \overline{B(M)})$ в одно-однозначное соответствие с множеством всех эрмитово-положительных функций $\varphi(\lambda)$ на M; при этом функция $\varphi(\lambda) = \overline{\varphi(-\lambda)} \not\equiv 0$ называется эрмитово-положительной на M, если для любых $\lambda_1 \in M, \ldots, \lambda_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эрмитова форма

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(\lambda_j - \lambda_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \qquad (1)$$

неотрицательна**.

Условимся говорить, что эрмитово-положительная функция $\varphi(\lambda)$ $(\lambda \in M)$ имеет конечный ранг p, если каждая из форм (1) имеет ранг $\leqslant p$ и хотя бы одна из них имеет ранг p.

Тогда из указанного общего результата А. П. Артеменко и теоремы 6 непосредственно вытекает, что множеству S_u соответствует множество всех эрмитово-положительных функций $\chi(\lambda)$ ранга 1 и таких, что $\chi(0) = 1$, или, что то же, множество всех характеров группы M*** $(\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu),\ \lambda, \mu \in M;\ \chi(0) = 1)$.

Отметим еще следующее предложение:

Эрмитово-положительная функция $\varphi(\lambda)$ $(\lambda \in M)$ имеет конечный ранг p тогда и только тогда, когда $\varphi(\lambda)$ допускает представление

$$\varphi(\lambda) = \rho_1\chi_1(\lambda) + \rho_2\chi_2(\lambda) + \ldots + \rho_p\chi_p(\lambda),$$

где $\rho_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, а $\chi_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ — различные между собой характеры группы M; при этом если $\varphi(\lambda)$ непрерывна в точке 0

---

* И. М. Гельфанд рассматривал случай $M = J$.

** А. П. Артеменко рассматривал случай $M = J$, но его рассуждения сохраняют силу для произвольной аддитивной подгруппы $M \subset J$.

*** Сравни с И. М. Гельфандом [11].

(*при обычной метрике действительных чисел*), *то* $\chi_j(\lambda)=e^{i\alpha_j\lambda}$ $(\lambda \in M)$, *где* $-\infty<\alpha_j<\infty$ $(j=1, 2, \ldots, p)$.

Это предложение является обобщением известного предложения C. Caratheodory ([13]) о сингулярных теплицевских формах [см. также ([9])].

Одесский государственный университет
Киевский государственный университет

Поступило
13 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Матем. сборн., 2(44): 1 (1937). [2] F. Riesz, Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna, т. III, p. 143—148 (1928) (VI). [3] Л. В. Канторович, ДАН, I(X), № 7 (1936). [4] M. Krein a. V. Šmulyan, Annals of Mathematics (1939). [5] М. Крейн и Д. Мильман, Studia Mathematica, t. IX (1940). [6] A. Tychonoff, Math. Ann., **102** (1929). [7] А. Юдин, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [8] E. Čech, Annals of Mathematics, 38, 823—844 (1937). [9] Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, ст. III, ОНТИ, ДНТВУ, Харьков (1938). [10] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [11] И. М. Гельфанд, ДАН, XXV, № 7 (1939). [12] А. П. Артеменко, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, сер. 4, т. 16. [13] C. Caratheodory, Rend. di Palermo, XXXII (1911). [14] М. Г. Крейн, ДАН, XXVI, № 1 (1940).

Получено
5 III 1940