Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. ЕРМОЛАЕВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПРОЕКТИВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 5 III 1940)

1. Пусть S и Σ две поверхности, точки которых M и N связаны взаимно однозначным соответствием так, что S и Σ не совпадают с фокальными полостями конгруэнции MN. Тогда во всяком пучке прямых, касательных к S в каждой M, могут быть установлены два проективных соответствия: отображение P и отображение T ([1]); их уравнения имеют вид:

$$a_3^2\, du\, \delta u + b_3^2\, dv\, \delta u - a_3^1\, du\, \delta v - b_3^1\, dv\, \delta v = 0; \tag{1}$$

$$a_1^0\, du\, \delta u + b_1^0 dv\, \delta u - a_2^0\, du\, \delta v - b_2^0\, dv\, \delta v = 0, \tag{2}$$

где a_i^k и b_i^k—инварианты асимптотического тетраэдра $MM_1M_2M_3$ поверхности S, точка M_3 которого совпадает с N, а плоскость $M_1M_2M_3$ касается Σ.

Два направления $\delta_1 u : \delta_1 v$ и $\delta_2 u : \delta_2 v$, соответствующие в (1) и (2) одному и тому же направлению $du : dv$, связаны между собой соотношением, которое получится исключением $du : dv$ из (1) и (2):

$$\begin{vmatrix} a_3^2 & b_3^2 \\ a_1^0 & b_1^0 \end{vmatrix} \delta_1 u\, \delta_2 u - \begin{vmatrix} a_3^2 & b_3^2 \\ a_2^0 & b_2^0 \end{vmatrix} \delta_1 u\, \delta_2 v - \begin{vmatrix} a_3^1 & b_3^1 \\ a_1^0 & b_1^0 \end{vmatrix} \delta_2 u\, \delta_1 v + \begin{vmatrix} a_3^1 & b_3^1 \\ a_2^0 & b_2^0 \end{vmatrix} \delta_1 v\, \delta_2 v = 0. \tag{3}$$

Сумма коэффициентов двух средних членов равна нулю в силу соотношений, существующих между инвариантами a и b:

$$a_3^2\, b_2^0 - b_3^2\, a_2^0 + a_3^1\, b_1^0 - b_3^1\, a_1^0 = 0. \tag{4}$$

Следовательно, проективное соответствие (3) никогда не может быть инволюцией, и его двойные линии

$$\begin{vmatrix} a_3^2 b_3^2 \\ a_1^0 b_1^0 \end{vmatrix} \delta u^2 + \begin{vmatrix} a_3^1 & b_3^1 \\ a_2^0 & b_2^0 \end{vmatrix} \delta v^2 = 0 \tag{5}$$

всегда сопряжены в смысле Дюпена.

Двойные линии неопределенны, т. е. отображение P совпадает с отображением T, когда коэффициенты (5) равны нулю. В силу (4) в этом случае

$$a_1^0 = \lambda a_3^2;\ \ b_1^0 = \lambda b_3^2;\ \ a_2^0 = \lambda a_3^1;\ \ b_2^0 = \lambda b_3^1, \tag{6}$$

т. е. асимптотические касательные соответствующих точек S и Σ попарно пересекаются ([2]).

2. Отношения $du : dv$ и $-du : dv$ определяют две касательные к S в M, которые сопряжены в смысле Дюпена. Рассмотрим два направления: одно из них $\delta_1 u : \delta_1 v$ соответствует $du : dv$ в отображении P, а другое $\delta_2 u : \delta_2 v$ соответствует $-du : dv$ в отображении T. Эти два направления образуют проективное соответствие, определяемое соотношением:

$$\begin{vmatrix} b_3^2 & b_1^0 \\ -a_3^2 & a_1^0 \end{vmatrix} \delta_1 u\, \delta_2 u - \begin{vmatrix} b_3^2 & b_2^0 \\ -a_3^2 & a_2^0 \end{vmatrix} \delta_1 u\, \delta_2 v - \begin{vmatrix} b_3^1 & b_1^0 \\ -a_3^1 & a_1^0 \end{vmatrix} \delta_1 v\, \delta_2 u + \\ + \begin{vmatrix} b_3^1 & b_2^0 \\ -a_3^1 & a_2^0 \end{vmatrix} \delta_1 v\, \delta_2 v = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим такое точечное соответствие поверхностей S и Σ, при котором эта гомография есть инволюция. Оно определяется в силу (4) равенствами

$$b_3^1 = p b_2^0;\ a_3^2 = p a_1^0;\ b_3^2 = q b_1^0;\ a_3^1 = q a_2^0, \qquad (8)$$

где p и q—два коэффициента пропорциональности.

Этот класс точечных соответствий более общий, чем класс, определяемый уравнениями (6), которые можно получить из (8) при $p = q$ [класс (8′)]; частным случаем этого же класса соответствий является соответствие с сохранением асимптотических; его можно получить, положив $p = -q$ (1).

3. Любые два направления, соответствующие в (7), совпадают, если

$$b_3^2 = -p b_1^0;\ a_3^2 = p a_1^0;\ b_3^1 = -q b_2^0;\ a_3^1 = q a_2^0,$$
$$b_3^2 a_2^0 + b_2^0 a_3^2 + b_3^1 a_1^0 + b_1^0 a_3^1 = 0, \qquad (9)$$

которые можно, имея в виду (4), представить в виде

$$\frac{b_3^2}{a_3^2} = -\frac{b_1^0}{a_1^0} = \frac{b_2^0}{a_2^0} = -\frac{b_3^1}{a_3^1} = k; \quad \begin{vmatrix} a_3^2 & a_3^1 \\ a_1^0 & a_2^0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Координаты точки $N = M_3$ поверхности Σ (1), соответствующей точке M, и тангенциальные координаты плоскости $m_3 = -(M_1 M_2 M_3)$ касательной Σ в N, удовлетворяют соотношениям:

$$dM_3 = a_3^1 (du - kdv) M_1 + a_3^2 (du + kdv) M_2 + (a_3^3 du + b_3^3 dv) M_3,$$
$$dm_3 = a_2^0 (du + kdv) m_1 + a_1^0 (du - kdv) m_2 + (a_3^3 du + b_3^3 dv) m_3. \qquad (11)$$

Если направления, соответствующие в (7), совпадают, то два направления $d_1 u : d_1 v$ и $d_2 u : d_2 v$ (одно из них такое, что прямая, касающаяся Σ, пересекает асимптотическую касательную поверхности S, и другое такое, что характеристика касательной плоскости к Σ пересекает ту же асимптотическую касательную — и это для всех асимптотических касательных к S) сопряжены в смысле Дюпена на S.

4. Эйзенхарт (3) назвал фундаментальным такое преобразование поверхности, при котором развертывающиеся конгруэнции прямых MN, соединяющих соответствующие точки, пересекают поверхности по сопряженным сетям. Уравнение основания соответствия Петерсона, т. е. сети, сопряженной одновременно на S и на Σ, имеет вид:

$$(a_3^1 a_1^0 + a_3^2 a_2^0)\, du^2 - (b_3^1 b_1^0 + b_3^2 b_2^0)\, dv^2 = 0.$$

Эти линии совпадают с двойными линиями отображения P при условиях:

$$b_3^2 = a_3^1;\ (a_3^1 a_1^0 + a_3^2 a_2^0) : a_3^2 = (b_3^1 b_1^0 + b_3^2 b_2^0) : b_3^1,$$

а из этих равенств и из (4) следует:

$$b_1^0 = a_2^0;\ a_3^2 : a_1^0 = b_3^1 : b_2^0.$$

Если двойные линии отображения P совпадают с основанием соответствия Петерсона, то двойные линии отображения T совпадают с этой же сетью, и обратно, если двойные линии отображений совпадают с сопряженной сетью, то эта сеть есть основание соответствия Петерсона и, следовательно, преобразование фундаментальное.

Фундаментальное соответствие принадлежит классу (8) при единственном дополнительном условии сопряженности двойных линий отображения P.

5. Пусть теперь Σ огибающая поверхностей Дарбу поверхности S, тогда имеют место соотношения:

$$a_2^1=0;\ b_1^2=0;\ a_3^1-b_3^2=a_2^0-b_1^0. \tag{12}$$

Точечное соответствие поверхностей S и Σ принадлежит классу (8) в двух случаях ([4]):

$$\text{A)}\quad q=1;\qquad \text{B)}\quad a_3^1=b_3^2. \tag{13}$$

В случае В), и только в этом случае, двойные линии отображения P и отображения T совпадают с одной и той же сопряженной сетью.

В случае А) Σ есть огибающая соприкасающихся поверхностей Ли. Функцию p от параметров u и v можно задать произвольно. Если, в частности, $p=1$, то

$$a_1^0=b_2^0=b_3^1=a_3^2=0; \tag{14}$$

поверхности S и Σ образуют пару Демулена-Годо с общими поверхностями Ли. Это соответствие принадлежит одновременно к классам (6) и (8′).

Поступило
8 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ермолаев, ДАН, XXVI, № 8 (1940). [2] S. Finikoff, Мат. сб., 6(48):3 (1939). [3] L. P. Eisenhart, Transformations of Surfaces, Princeton University Press (1923). [4] L. Ermolaev, Atti d. R. Acc. Naz. dei Lincei, XXII, pp. 23—29 (1935).