Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. И. РОЗОВСКИЙ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 5 I 1948)

1. Рассмотрим ферромагнитный сердечник, обладающий магнитной вязкостью и находящийся в катушке самоиндукции, включенной в цепь с сопротивлением.

Э.д.с. будет:

$$Э = RJ + \frac{d\Phi}{dt}. \tag{1}$$

Поток при отсутствии токов Фуко:

$$\Phi = 4\pi Sn(n_1\mu_1 J + G), \tag{2}$$

где J — ток, S — сечение сердечника, n — число витков на нем, $\mu_1 = 1 + 4\pi\chi_1$, n_1 — число витков на 1 см длины катушки, G — вязкая намагниченность.

Согласно В. Аркадьеву [1], G определяется из уравнения:

$$\frac{dG}{dt} = a(\chi_\infty 4\pi n_1 J - G), \tag{3}$$

где χ_∞ — коэффициент восприимчивости установившейся намагниченности.

Исключая Φ и G из (1)—(3), В. К. Аркадьев приходит к дифференциальному уравнению второго порядка относительно $J(t)$, которое затем исследуется. Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов В. К. Аркадьева при более общих предположениях, чем (3).

Мы примем, что G выражается через J с помощью интегрального оператора Вольтерра [2], применяемого при изучении явления последействия.

Будем иметь:

$$\Phi(t) = 4\pi Snn_1\left[\mu_1 J(t) + 4\pi\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)J(\tau)\,d\tau\right], \tag{4}$$

где $\varphi(t-\tau)$ — коэффициент магнитного последействия, определяющий закон влияния магнитной вязкости; способ его определения по экспериментальным данным был указан в одной из наших работ [3].

В случае В. К. Аркадьева $\varphi(t-\tau) = a\chi_\infty e^{-a(t-\tau)}$.

Заметим, что коэффициент магнитного последействия должен обладать следующими свойствами:

$$\varphi(\infty)=0, \quad \varphi(z)>0 \text{ при } z>0, \quad \int_0^\infty \varphi(z)\,dz = \text{const}. \tag{5}$$

2. Пусть $J(t) = Me^{i\omega t}$. Тогда

$$\Phi = 4Snn_1\mu_k J, \quad \text{где } \mu_k = \mu_1 + 4\pi \int_0^\infty \varphi(z)\,e^{-i\omega z}\,dz; \tag{6}$$

μ_k будем называть комплексной проницаемостью.

Из (6) следует, что если частота ω стремится к нулю, то комплексная проницаемость стремится к вещественной постоянной

$$\mu_* = \mu_1 + 4\pi \int_0^\infty \varphi(z)\,dz, \tag{7}$$

и вязкое намагничивание не отстает от поля, обнаруживая постоянную проницаемость (7), которая в случае В. К. Аркадьева равна $\mu_1 + 4\pi\chi_\infty$.

Если же частота $\omega \to \infty$, то, как в общем случае, так и по гипотезе В. К. Аркадьева, $\mu_k \to \mu_1$; следовательно, при любом законе магнитного последействия, отвечающем (5), процесс происходит настолько быстро, что часть намагниченности, связанной вязкостью, не успевает проявиться в течение конечного промежутка времени, и вещество обнаруживает постоянную проницаемость μ_1.

3. Исключая Φ из (1) и (4), получим интегро-дифференциальное уравнение для тока $J(t)$:

$$L\frac{dJ}{dt} + PJ + \int_{-\infty}^{t} \psi(t-\tau)\,J(\tau)\,d\tau = Э(t), \tag{8}$$

где

$$L = 4\pi Snn_1\mu_1, \quad P = R + 16\pi^2 Snn_1\varphi(0),$$

$$\psi(t-\tau) = 16\pi^2 Snn_1 \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}.$$

4. Если $Э(t) = Ae^{i\omega t}$, где A и ω — известные постоянные, то периодическое решение (с тем же периодом, каким обладает $Э(t)$) интегро-дифференциального уравнения (8) будет:

$$J(t) = \frac{Ae^{i\omega t}}{L\omega i + P + \int_0^\infty \psi(z)\,e^{-i\omega z}\,dz}.$$

5. Пусть $\varphi(t-\tau) = \sum_{m=1}^{p} \chi_m^* a_m e^{-a_m(t-\tau)}$. В этом случае мы считаем, что материал сердечника ведет себя как смесь ферромагнитных материалов с различными статическими коэффициентами восприимчивости χ_m^* и различными временами релаксации $1/a_m$, следующими независимо друг от друга гипотезе В. К. Аркадьева.

Пренебрегая влияниями последействия, предшествовавшими моменту $t_0 = 0$, получим из (8) для случая, когда $Э$ мгновенно исчезает:

$$L\frac{dJ}{dt}+PJ-K\int_0^t\sum_{m=1}^{p}\chi_m^* e^{-a_m(t-\tau)}J(\tau)\,d\tau=0, \tag{9}$$

где $K=16\pi^2 nn_1 S$.

Пользуясь методом, примененным нами в [3], получим решение интегро-дифференциального уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $J(0)=J_*$, в удобном для физической интерпретации виде:

$$J(t)=\sum_{k=1}^{p+1}c_k e^{r_k t},$$

где r_k определяется из уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{p+1}q_\nu r^{p-\nu+1}=0, \tag{10}$$

$$q_\nu=\alpha_\nu+\frac{P}{L}\alpha_{\nu-1}-\frac{K}{L}\sum_{m=1}^{p}\chi_m^*\beta_{m,\nu-2},$$

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_1=\Sigma a_{p_1},\quad \alpha_2=\Sigma a_{p_1}a_{p_2},\ldots,\quad \alpha_p=a_1a_2\ldots a_p,$$

$$\beta_0=1,\quad \beta_{m,1}=\Sigma a_{p_1}-a_m,\quad \beta_{m,2}=\Sigma a_{p_1}a_{p_2}-a_m(\Sigma a_{p_1}-a_m),\ldots,$$

$$\beta_{m,p-1}=\frac{a_1a_2\ldots a_p}{a_m}\qquad (p_1,\ p_2,\ldots=1,2,\ldots,p).$$

Произвольные постоянные c_ν определяются из системы $p+1$ уравнений:

$$J_*=\sum_{k=1}^{p+1}c_k,\quad \sum_{k=1}^{p+1}\frac{c_k}{r_k+a_m}=0\qquad (m=1,\ 2,\ldots,p),$$

определитель которой отличен от нуля.

В случае, когда корни уравнения (10) кратные, для образования $p+1$ линейно независимых частных решений интегро-дифференциального уравнения (9) следует поступать, как поступают в таком случае при решении линейного дифференциального уравнения.

В цепи возможны собственные колебания, если все $p+1$ определителя, образованные по правилу Гурвица [4] с помощью коэффициентов уравнения (10), положительны.

В случае, когда все коэффициенты уравнения (10) положительны, возможен также чисто апериодический процесс.

6. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда не предопределяется заранее вид функций $\varphi(t-\tau)$ и $\text{Э}(t)$, а также учитывается полное влияние последействия от $-\infty$ до t.

Для этого приведем интегро-дифференциальное уравнение (8) к следующему интегральному уравнению.

$$J(t)+\frac{\lambda}{L}\int_0^t e^{\frac{P}{L}(s-t)}ds\int_{-\infty}^{s}\psi(s-\tau)J(\tau)\,d\tau=F(t), \tag{11}$$

где λ — параметр малости $F(t)=\left[J_*+\frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{P}{L}s}\,\text{Э}(s)\,ds\right]e^{-\frac{P}{L}t}$.

В рассматриваемом случае ток $J(t)$ будет определяться рядом

$$J(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m J_m(t), \tag{12}$$

при

$$J_0(t) = F_{\iota}(t),$$

$$J_{m+1}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{P}{L}(s-t)} ds \int_{-\infty}^{s} \psi(s-\tau) J_m(\tau) d\tau.$$

Пусть выполняется равномерно при всех τ рассматриваемого интервала неравенство $|Э(\tau)| < Э_0$; $Э_0$ — постоянное, и, кроме того.

$$\int_0^{\infty} |\psi(z)| dz \leqslant B.$$

Сделанные выше предположения, необходимые для существования единственного ограниченного решения уравнения (11), естественно вытекают из физических соображений рассматриваемой задачи.

Будем иметь следующее неравенство

$$|J_m(t)| < J_{\bullet} \left(\frac{B}{P}\right)^m.$$

Отсюда следует, что ряд (12), представляющий решение уравнения (11), сходится абсолютно и равномерно при всяком значении λ, удовлетворяющем неравенству

$$|\lambda| < P/B. \tag{13}$$

Решение (12) при условии (13) — единственное.

Поступило
2 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Аркадьев, ЖЭТФ, 7, 1 (1937). [2] V. Volterra, Atti Reale Accad. Lincei, Roma, Rendi Conti, 18, 5 (1909). [3] М. Розовский, ЖЭТФ, 16, 10 (1946). [4] Д. Граве, Элементы высшей алгебры, 1936.