Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. А. ВАЙНШТЕЙН

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНЫ E_0 В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ С ПОМОЩЬЮ КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 9 I 1948)

Для возбуждения волны E_0, как известно, может быть применен продольный вибратор, расположенный на оси круглого волновода; этот вибратор вместе с прилегающим участком стенки волновода образует отрезок коаксиальной линии, в точке сочленения которой с волноводом „коаксиальная“ волна трансформируется в „волноводную“ волну.

В деталях этой трансформации позволяет разобраться следующая задача. Рассмотрим бесконечную круглую трубу радиуса b и в ней полубесконечный внутренний проводник в виде полой трубки радиуса $a<b$, расположенной при $z>0$ коаксиально с внешней трубой (рис. 1). Стенки считаем идеально проводящими. Ясно, что в этом случае тонкая трубка ведет себя в электродинамическом отношении так же, как и сплошной цилиндрический проводник того же радиуса. Рассматриваемая система интересна как один из немногочисленных примеров сочленения двух передающих линий, когда электродинамический расчет может быть произведен вполне строго.

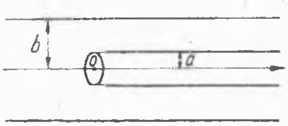

Рис. 1

Предположим, что со стороны коаксиала $z>0$ на сочленение набегает основная волна с волновым числом $-k$ (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$, $k=\omega/c$). Вводя цилиндрические координаты r, φ, z и учитывая, что все токи текут параллельно оси z, а поля не зависят от φ, мы сводим задачу к решению волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+k^2A_z=0 \qquad (1)$$

для составляющей A_z векторного потенциала, причем поля выражаются через A_z следующим образом:

$$E_z=-\frac{1}{ik}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+k^2A_z\right),\quad E_r=-\frac{1}{ik}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\,\partial r},\quad H_\varphi=-\frac{\partial A_z}{\partial r}. \qquad (2)$$

Эти поля должны удовлетворять граничным условиям

$$E_z=0 \text{ при } r=b, \qquad (3)$$

$$E_z=0 \text{ при } r=a,\ z>0 \qquad (4)$$

и быть непрерывными всюду при $r < b$, за исключением стенок трубки $r = a$, $z > 0$. Решение можно получить методом, примененным нами ранее для другой задачи ([1]). Мы пишем сначала частное решение уравнения (1), зависящее от параметра w и удовлетворяющее условию (3):

$$A_z(r, z, w) =$$

$$= \frac{2\pi^2 a}{c} \frac{F(w)}{J_0(vb)} \begin{cases} \cdot J_0(vr)\,[N_0(vb)\,J_0(va) - J_0(vb)\,N_0(va)] \text{ при } r < a \\ \cdot J_0(va)\,[N_0(vb)\,J_0(vr) - J_0(vb)\,N_0(vr)] \text{ при } r > a, \end{cases} \tag{5}$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя и Неймана, а

$$v = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \operatorname{Im} v > 0. \tag{6}$$

Образуя по формулам (2) соответствующие поля, легко находим

$$H_\varphi(a + 0, z, w) - H_\varphi(a - 0, z, w) = \frac{4\pi}{c} F(w)\, e^{iwz}. \tag{7}$$

Будем теперь искать такую суперпозицию частных решений (5):

$$A_z(r, z) = \int_C A_z(r, z, w)\, dw, \tag{8}$$

чтобы: 1) H_φ было непрерывно при $r = a$, $z < 0$; 2) выполнялось условие (4). Это ведет к таким соотношениям для искомой функции $F(w)$:

$$\int_C e^{iwz} F(w)\, dw = 0 \text{ при } z < 0, \tag{9}$$

$$\int_C e^{iwz} v\, \Psi(w)\, F(w)\, dw = 0 \text{ при } z > 0, \tag{10}$$

где

$$\Psi(w) = -i\pi v a \frac{J_0(va)}{J_0(vb)} [N_0(vb)\, J_0(va) - J_0(vb)\, N_0(va)]. \tag{11}$$

Фигурирующая здесь функция $F(w)$ имеет простой физический смысл, а именно

$$f(z) = \int_C e^{iwz} F(w)\, dw \tag{12}$$

есть z-я составляющая поверхностной плотности тока на внутреннем проводнике. Мы считаем $\operatorname{Im} k > 0$ и берем контур интегрирования C таким же, как и в ([1]); тогда набегающая волна имеет волновое число $-k$.

Функция $v\Psi(w)$, как легко усмотреть из (11), есть отношение двух целых функций, нули которых расположены на кривых $\operatorname{Im} v = 0$. Определяя функции Ψ_1 и Ψ_2 так же как в ([1]) и вычисляя их логарифмические производные, мы пользуемся тем, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\Psi(w)/dw}{\Psi(w)} \cdot \frac{dw}{w - u},$$

распространенный по полуокружности радиуса V, стремится к нулю, если $V \to \infty$ так, что полуокружность не проходит через полюсы подинтегрального выражения; это стремление легко доказать, если учесть, что при $\operatorname{Im}(va) \gg 1$

$$\Psi(w) \approx 1 - e^{i2v(b-a)}.$$

Поэтому, деформируя путь интегрирования для Ψ_2 наверх, мы получаем:

$$\frac{d\Psi_2(u)}{du}=\frac{1}{2(u-k)}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{u-w_m^a}-\frac{1}{u-w_m^b}+\frac{1}{u-w_m^c}\right]-\frac{iaT}{\pi}, \tag{13}$$

где w_m^a — находящиеся в верхней полуплоскости корни уравнения $J_0(\sqrt{k^2-w^2}\,a)=J_0(va)=0$, расположенные в порядке возрастания v, а w_m^b и w_m^c, соответственно, нули функций $J_0(vb)$ и $N_0(vb)J_0(va)-J_0(vb)N_0(va)$. Иначе говоря, w_m^a и w_m^b суть волновые числа волн $E_{0,m}$ в волноводах радиусов a и b, а w_m^c — волновые числа симметричных электрических волн в коаксиальной линии. Слагаемое в (13), пропорицональное

$$T=\frac{b}{a}\ln\frac{b}{a}-\left(\frac{b}{a}-1\right)\ln\left(\frac{b}{a}-1\right), \tag{14}$$

возникает как предел разности между частной суммой ряда в (13) и суммой вычетов в полюсах, находящихся внутри полуокружности радиуса V, при $V\to\infty$. Из (13) имеем:

$$\Psi_2(w)=\Psi_1(-w)=K\sqrt{k-w}\,e^{-iT(wa/\pi)}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-w/w_m^a)(1-w/w_m^c)}{1-w/w_m^b}, \tag{15}$$

где постоянная K получается из соотношения $\Psi=\Psi_1\Psi_2$ (при $w=0$) равной

$$K=\sqrt{-i\pi a\frac{J_0(ka)}{J_0(kb)}[N_0(kb)J_0(ka)-J_0(kb)N_0(ka)]}, \tag{16}$$

причем неопределенность в знаке K на окончательные результаты не влияет.

Возьмем $F(w)$ в виде (ср. ([1]), формула (20)):

$$F(w)=\frac{B}{(w+k)\sqrt{k-w}\,\Psi_2(w)}=\frac{1}{v\Psi(w)}\frac{B\Psi_1(w)}{\sqrt{k+w}}, \tag{17}$$

где B — постоянная. Так как контур C состоит из вещественной оси w и бесконечно узкой петли, охватывающей точку $w=-k$, то соотношение (9) удовлетворяется в силу того, что $F(w)$ есть голоморфная при $\operatorname{Im} w\leqslant 0$ функция, стремящаяся на этой полуплоскости при $|w|\to\infty$ равномерно к нулю, а соотношение (10) — в силу того, что функция $v\Psi(w)F(w)$ обладает теми же свойствами при $\operatorname{Im} w\geqslant 0$ и конечна (и даже голоморфна) внутри упомянутой петли.

Формула (17) решает поставленную задачу, и, подставляя $F(w)$ в (12), мы получаем выражение для тока, текущего по внутреннему проводнику, а подставляя в (5) и (8) — выражения для полей в каждой точке пространства. При этом выражения для полей распадаются в каждой из трех областей: 1) $z<0$, $r<b$; 2) $z>0$, $r<a$; 3) $z>0$, $a<r<b$ на свой ряд вычетов, дающих характерные для каждой области волноводные или коаксиальные волны с волновыми числами, равными, соответственно, 1) — w_m^b, 2) w_m^a, 3) w_m^c, причем в области 3) — коаксиале — существуют еще: набегающая основная волна с током Ae^{-ikz} и отраженная с током ARe^{ikz}, где A — постоянная, а R — коэффициент отражения основной волны от сочленения коаксиал - волновод — получается в виде:

$$R=-e^{i2T(ka/\pi)}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+k/w_m^a}{1-k/w_m^a}\,\frac{1-k/w_m^b}{1+k/w_m^b}\,\frac{1+k/w_m^c}{1-k/w_m^c}. \tag{18}$$

В окончательных результатах следует положить $\operatorname{Im} k = 0$ и учитывать, что затухающие волны (чисто мнимые w_m) имеют заметные значения только вблизи сочленения, при $|z| \leqslant b$; они обусловливают непрерывный переход от одной области, с характерной для нее структурой поля распространяющейся волны, к другой, и поскольку они исчезают лишь на расстояниях, сравнимых с длиной волны, их учет для определения R существенен. Действительно, как видно из (18), коэффициент отражения основной волны определяется всей совокупностью волновых чисел волн, могущих существовать в отдельных частях системы.

Если в волноводе и коаксиале вообще не существует распространяющихся волн (кроме основной), то из (18) получаем $|R| = 1$, что очевидно физически. Если же в волноводе радиуса b может распространяться только волна $E_{0,1}$ с волновым числом $h = w_1^b$, а все остальные волновые числа w_m^a, w_m^b и w_m^c попрежнему мнимы, то получается формула

$$|R| = \frac{k-h}{k+h}, \tag{19}$$

замечательная своей простотой.

В виде, аналогичном (18) и (19), могут быть получены и амплитуды других волн, причем получающиеся бесконечные произведения легко могут быть приспособлены для численных расчетов.

Мы рассмотрели, в сущности, собственные колебания полубесконечной цилиндрической антенны, помещенной на оси бесконечного круглого волновода. Эта задача может быть сведена к однородному интегральному уравнению для плотности тока $f(z)$ (12), текущего по внутреннему цилиндру. Соотношения (9) и (10) эквивалентны этому интегральному уравнению. Если на сочленение падает волна со стороны волновода $z < 0$, то мы имеем „вынужденные“ колебания внутреннего проводника, для плотности тока в котором получается неоднородное интегральное уравнение. Оно может быть легко решено методом, указанным В. А. Фоком ([2]), причем для коэффициентов отражения и других величин также получаются простые выражения. Мы предполагаем разобрать этот вопрос подробнее в другом месте.

Поступило
7 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Вайнштейн, ДАН, **58**, № 9 (1947). [2] В. А. Фок, Матем. сборник, **14**, 1 (1944); ДАН, **37**, 147 (1942).